Lehrbuch

der ebenen

Polygonometrie

als Vorbereitungs-Wissenschaft

zu den

Vorlesungen über praktische Geometrie

an technischen Instituten.

Von

Stephan von Krusper,

supplirendem Professor der höheren Mathematik u. praktischen Geometrie
an der k. k. Josephs-Industrieschule zu Ofen.

Mit 27 in den Text gedruckten Figuren in Holzschnitt.

OFEN.

Verlag von Andr. Schröpfer.

1856.

Lehrbuch

der ebenen

Polygonometrie

als Vorbereitungs-Wissenschaft

zu den

Vorlesungen über praktische Geometrie

an technischen Instituten.

Von

Stephan von Krusper,

supplirendem Professor der höheren Mathematik und praktischen Geometrie
an der k. k. Josephs-Industrieschule zu Ofen.

Mit 27 in den Text gedruckten Figuren in Holzschnitt.

OFEN,

Verlag von Andr. Schröpfer.

1856.

Seiner Hochwürden

dem

Herrn Herrn

MARIAN KOLLER,

Capitular des Benediktiner-Stiftes Kremsmünster, k. k. Ministerialrathe, Dr. der Philosophie, Mitgliede mehrerer gelehrten Gesellschaften, etc. etc.

mit tiefster Hochachtung, und innigster Dankbarkeit gewidmet

vom

Verfasser.

Vorwort.

Dieses Werkchen hat die nächste Bestimmung, bei meinen Vorlesungen über praktische Geometrie an der k. k. Josephs-Industrieschule zu Ofen als Leitfaden zu dienen. Einige neuere Schriftsteller haben die wichtigsten Aufgaben der Polygonometrie in die Lehrbücher der Messkunde am geeigneten Orte eingeschaltet. Abgesehen von der Unzweckmässigkeit einer solchen Digression, welche, wenn sie keine Bruchstücke, sondern etwas einigermassen Vollständiges leisten soll, ohne Störung der Abrundung im Vortrage des Hauptgegenstandes nicht geschehen kann, halte ich die Polygonometrie für wichtig genug, um sie — eine der nächsten Consequenzen der Trigonometrie — als eine selbstständige Lehre systematisch abzuhandeln, und den specifischen Lehren der Messkunde als eine Vorbereitungs-Wissenschaft vorauszuschicken. Ich folge hierin dem Beispiele des um die praktische Geometrie hochverdienten Herrn S. Stampfer, meines Lehrers, nach dessen leider nicht veröffentlichten Vorträgen ich manches gehalten habe. Auch wurden die betreffenden Werke von Dienger, Gerling, Grunert u. m. a. zu Rathe gezogen. In der Begründung habe ich mich der höheren Mathematik bedient, indem dieser Gegenstand an allen technischen Anstalten der österreichischen Monarchie gelehrt, an der k. k. Josephs-Industrieschule zu Ofen aber ausserdem noch als ein Vorstudium

der praktischen Geometrie angesehen wird. Die grösste Allgemeinheit, und mathematische Strenge habe ich hauptsächlich angestrebt; und im zweiten Abschnitte eine dem wissenschaftlich gebildeten Geometer willkommene, wegen der grossen Anschaulichkeit der Resultate einigermassen elegante Bestimmung der Fehlereinflüsse gegeben.

Möge das Werkchen für die Bildung des strebsamen jungen Geometers jene Früchte tragen, welche ich bei Verfassung desselben hervorzubringen beabsichtigt habe!

Ofen, am 14. October 1855.

Steph. v. Krusper.

Inhalt.

Einleitung.

Erster Abschnitt.

Einleitung.

§. 1.

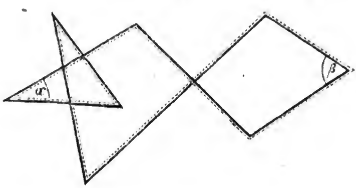
Die Polygonometrie ist derjenige Theil der Geometrie, welcher die Beziehungen unter den Bestandtheilen eines Polygones aufzufinden, und die unbekannten Stücke durch die bekannten zu bestimmen lehrt.

§. 2.

Unter einem Polygone verstehen wir im Allgemeinen eine in sich selbst zurückkehrende gebrochene Linie, möge sich diese durchkreuzen, oder nicht. Wir werden in diesen Vorlesungen das Polygon stets in einer Ebene liegend voraussetzen.

§. 3.

Jedes Polygon von n Seiten hat auch n Winkel; diese können entweder innere oder äussere Winkel sein, je nachdem sie im inneren oder äusseren Raume des Polygons liegen. Wenn die Polygonseiten sich mehrfach durchschneiden, ist es nicht leicht zu entscheiden, ob irgend ein Polygonwinkel ein innerer oder ein äusserer sei, z.B. in der beiliegenden Figur sei α ein innerer Polygonwinkel, es fragt sich, ob β ein innerer, oder äusserer Winkel sei? Zur Richtschnur dient folgendes Verfahren: man ziehe längs den Polygonseiten eine punktirte Linie, ohne je bei einem Endpunkte die Seiten des Polygons zu überschreiten, so sind sämmtliche auf der punktirten Seite liegende Polygonwinkel von einerlei Kategorie; demnach ist der Winkel β ein äusserer.



Anmerkung. Auf dem Felde entscheidet man, welcher von den zwei Winkeln, die durch zwei Strahlen stets gebildet werden, der innere oder der äussere sei, folgendermassen: man denke sich im Anfangspunkte mit dem Gesichte gegen die innere Seite des Polygones gekehrt, so dass die linke Hand gegen diejenige Rich-

tung hinweise, nach welcher die Polygonecken zunehmende Zeiger erhalten sollen; die rechte hingegen nach derjenigen Richtung, in welcher die Zeiger abnehmen. Geht man nun am Umfange des Polygons nach der linken Hand vorwärts, und stellt sich in irgend einem Endpunkte so auf, dass die rechte Hand gegen die niedriger, die linke aber gegen die höher numerirte Ecke zeigt, so hat man den inneren Winkel vor sich, und den äusseren hinter sich.

§. 4.

Ausser den Umfangsstücken hat jedes Polygon noch andere Bestandtheile, durch welche es nicht minder genau festgelegt wird, als durch die Umfangsstücke; die wichtigsten unter ihnen sind die Diagonalen, sammt den Winkeln, welche sie unter einander einschliessen, ferner die orthogonalen Coordinaten der Eckpunkte. Diese verschiedenen Gattungen von Bestimmungsstücken sind mit einander in innigem Zusammenhange, so dass eine jede von ihnen durch die anderen ausgedrückt werden kann.

§. 5.

Lehrsatz. Ein n Eck ist durch 2n—3 Bestimmungsstücke sowohl der Form als der Grösse nach (mit wenigen Ausnahmen) vollständig bestimmt.

Beweis. I. Wenn das Polygon durch orthogonale Coordinaten festgelegt werden soll, nehme man den Anfangspunkt in einem Eckpunkte, und lege die Axe der x durch einen zweiten Punkt; dann hat man n—2 Punkte, deren beide Coordinaten (also 2n—4 Stücke), und einen Punkt, dessen nur die Abscisse allein angegeben werden müssen, um das Polygon vollständig verzeichnen zu können. Diese geben zusammen 2n—3 Bestimmungsstücke.

II. Wenn das Polygon durch Diagonalen und die zwischenliegenden Winkel bestimmt werden soll, so sind zur Feststellung von n Punkten n—1 Diagonalen, und n—2 Winkel, also zusammen 2n—3 Bestimmungsstücke erforderlich.

III. Wenn das Polygon durch Umfangsstücke gegeben werden soll, so sind zwischen n Punkten n—1 Verbindungslinien, und der Neigungswinkel zwischen je zwei anstossenden Linien, d. h. n—2 Winkel erforderlich, um die Lage der n Punkte gegen einander unverrückbar zu fixiren. Diese geben zusammen ebenfalls 2n—3 Stücke.

Erster Abschnitt.

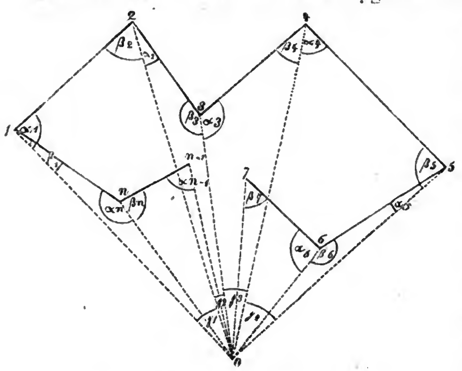
§. 6.

Lehrsatz. Die Summe aller inneren, oder äusseren Winkel eines n Eckes ist

$$S = (n-2v)\,180^0, \text{ wo } v \begin{matrix} > -\frac{n}{2} \\ < +\frac{n}{2} \end{matrix},$$

und stets eine ganze Zahl ist.

Beweis. Man denke sich das Polygon durch Drehung einer geraden Linie 0 1 um einen ausserhalb des Polygones liegenden fixen Punkt 0. und durch Verschiebung eines beweglichen Punktes 1 längs dieser Geraden entstanden. Zieht man nun von dem fixen Punkte 0 an alle Eckpunkte gerade Linien, um die verschiedenen Stellungen der beweglichen Geraden, wie sie eben durch die Eckpunkte des Polygones geht, anzudeuten: so zerfällt das Polygon in so viel Dreiecke, als Seiten vorhanden sind, indem jede Seite des Polygones die Grundlinie eines Dreieckes bildet, dessen Spitze sich im fixen Punkte 0 befindet. Diejenigen unter diesen Dreiecken, welche durch Drehung der beweglichen Geraden von links nach rechts erzeugt wurden, wollen wir positiv annehmen, demnach jene, welche durch die entgegengesetzte Drehung entstanden sind, müssen nach den allerersten Begriffen der Geometrie negativ genommen werden. Bezeichnet man nun die absoluten Werthe der



Winkel an der Basis dieser Dreiecke mit α, β, an der Spitze mit γ, denen noch die Stellenzeiger der Ecken beigefügt werden sollen, so erhält man

aus dem △	1, 2, 0,	die Gleichung	$\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_1 = 180^0$
dto.	2, 3, 0,	dto.	$\alpha_2 + \beta_3 + \gamma_2 = 180^0$
dto.	3, 4, 0,	dto.	$\alpha_3 + \beta_4 + \gamma_3 = 180^0$
dto.	4, 5, 0,	dto.	$\alpha_4 + \beta_5 + \gamma_4 = 180^0$
dto.	5, 6, 0,	dto.	$-\alpha_5 - \beta_6 - \gamma_5 = -180^0$
. .	. . .	. .	. . . . . .
. .	. . .	. .	. . . . . .
dto.	n, 1, 0,	dto.	$-\alpha_n - \beta_1 - \gamma_n = -180^0$.

Addirt man diese Gleichungen, so vereinigen sich die mit demselben Stellenzeiger behafteten α und β entweder zu einem inneren, oder zu einem äusseren Winkel des Polygons, je nachdem sie eine positive, oder eine negative Summe geben, oder umgekehrt; die Summe aller γ hingegen ist $= 0$, weil die bewegliche Gerade genau dieselbe Drehung rückwärts zurücklegen muss, welche sie vorwärts erfahren hat, um in die ursprüngliche Lage zurückzukommen.

Hieraus folgt, dass, wenn man

die absolute Summe der durch die Addition entstandenen inneren Polygonwinkel mit	I	bezeichnet,
die absolute Summe der durch die Addition entstandenen äusseren Polygonwinkel mit	A	
die Anzahl der Polygonecken mit	n	
die Anzahl der negativen Dreiecke mit	m	

aus welchen letzteren Beziehungen für die Anzahl der positiven Dreiecke sich n—m ergibt, die Gleichung bestehen muss:

$$I - A = (n - 2m)\, 180^0.$$

Aber jeder äussere Winkel macht mit dem correspondirenden inneren einen vollen Winkel aus; bezeichnet man demnach die Summe derjenigen inneren Winkel, welche den in der Winkelsumme A enthaltenen äusseren entsprechen, und deren Anzahl wir p nennen wollen, mit I': so erhält man die Gleichung

$$A + I' = 2\,p\, 180^0.$$

Aus diesen 2 Gleichungen folgt durch Addition

$$I + I' = S = [n - 2\,(m - p)]\, 180^0.$$

Setzt man $m - p = v$, welche Zahl, als der Unterschied zweier

ganzen Zahlen, stets ganz sein muss, übrigens sowohl positiv, als negativ werden kann, so erhält man endlich

$$S = (n-2v)\,180^0 \;\ldots\ldots\; 1.)$$

Die Grenzen, zwischen welchen v variirt, ergeben sich auf folgende Weise: jeder Polygonwinkel ist stets $\gtrless \begin{matrix} 0^0 \\ 2.180^0, \end{matrix}$ folglich die Summe von n Winkeln $\gtrless \begin{matrix} 0^0 \\ 2\,n\,180^0. \end{matrix}$ Hieraus folgen die Beziehungen

$$n-2\,v \gtrless \begin{matrix} 0 \\ 2\,n \end{matrix} \quad \text{oder } v \gtrless \begin{matrix} -\frac{n}{2} \\ +\frac{n}{2} \end{matrix}$$

§. 7.

Aus dem Lehrsatze des vorigen §. lassen sich folgende Folgerungen ziehen:

I. Wenn in einem Polygone sämmtliche Winkel, bis auf einen einzigen, bekannt sind, so lässt sich auch dieser finden. Es seien nämlich die Polygonwinkel A, B, C, D . . . . M, w, so ist

$$(n-2\,v)\,180^0 = A + B + C + \ldots + M + w$$

hieraus folgt:

$$w = (n-2\,v)\,180^0 - (A + B + C + \ldots + M) \;\ldots\ldots\; 2.)$$

Diese Formel gibt den Werth für w zwar nicht directe, sondern indirecte, indem man für v nach einander alle zulässigen Werthe setzen muss, bis man für w einen brauchbaren Werth erhält; nichts desto weniger ist diese Auflösung vollkommen bestimmt, weil nur ein einziges v existirt, welches dem w einen positiven, zwischen 0° und 360° fallenden Werth ertheilt, alle übrigen Resultate aber, als dem Begriffe eines Polygonwinkels zuwider, ausgeschlossen werden müssen; z. B. es seien die bekannten Winkel eines 6 Eckes

A =	17°	22′
B =	22°	40
C =	15	15
D =	36	55
E =	15	8
Summe =	107°	20′

so ist

$$w = (6-2\,v)\,180^0 - 107^0\,20'.$$

Nun kann v nur folgende Werthe annehmen: $-2, -1, 0, +1, +2$; setzt man diese Werthe der Reihe nach in die obige Formel, so erhält man für w die Zahlenwerthe: 1692° 50′, 1332° 50′, 972° 50′, 612° 50′, 252° 50′. Von diesen fünf Winkeln ist nur der letzte brauchbar, indem alle übrigen ausserhalb der Grenzen eines Polygonwinkels liegen; demnach ist

$$w = 252^0\ 50'.$$

II. Wenn man die Summe aller Polygonwinkel durch die Anzahl der Winkel theilt, erhält man den Winkel eines regelmässigen Polygons. Bezeichnet man diesen Winkel mit w, so ist

$$w = \left(1 - \frac{2\,v}{n}\right) 180^0,$$

wo anstatt v alle zulässigen Werthe gesetzt werden können. Eine kleine Ueberlegung lehrt uns, dass, wenn man der Grösse v gleiche, aber dem Zeichen nach entgegengesetzte Werthe beilegt, die correspondirenden inneren und äusseren Winkel desselben Polygons entstehen müssen. Wir haben demnach für v nur positive Werthe zu setzen, um alle möglichen Formen der regelmässigen Vielecke zu erhalten. Ebenso muss $v = o$ ausgeschlossen werden, weil diese Substitution zu einer geraden Linie führt, welche nicht zur Klasse der regelmässigen Vielecke gezählt werden darf. Auf diese Weise erhalten wir für die regulären Vielecke folgendes Schema:

n	v	Anzahl der regulären Polygone
3	1	1
4	1	1
5	1, 2	2
6	1, 2	2
7	1, 2, 3	3
8	1, 2, 3	3

Es muss hierbei noch bemerkt werden, dass diejenigen Formen regulärer Vielecke, bei welchen n durch v theilbar ist, aus mehreren getrennten Figuren bestehen, während die übrigen durch einen ununterbrochenen Zug beschrieben werden können.

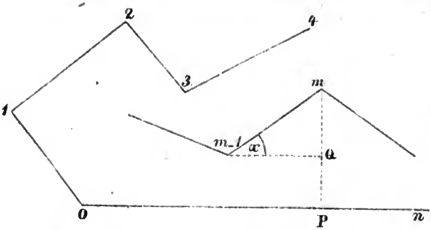
§. 8.

Lehrsatz. Bezeichnet man die Eckpunkte eines Polygones mit den fortlaufenden Nummern 0, 1, 2, 3, ... n, die Polygon-

winkel mit (0), (1), (2), (3), ... (n), und die Seiten mit (0,1), (1,2), (2,3) . . . . (n—1, n), (n,o), wo Seiten und Winkel stets positiv sind; wählt man ferner die Seite (o,n) zur Axe der x, und o zum Anfangspunkte der orthogonalen Coordinaten, so ist allgemein

$$y_m = (0,1)\,\mathrm{Sin}\,(0) - (1,2)\,\mathrm{Sin}\,[(0)+(1)] + (2,3)\,\mathrm{Sin}\,[(0)+(1)+(2)] - \ldots + (-1)^{m-1}(m-1,\,m)\,\mathrm{Sin}\,[(0)+(1)+\ldots+(m-1)],$$
$$x_m = (0,1)\,\mathrm{Cos}\,(0) - (1,2)\,\mathrm{Cos}\,[(0)+(1)] + (2,3)\,\mathrm{Cos}\,[(0)+(1)+(2)] - \ldots + (-1)^{m-1}(m-1,\,m)\,\mathrm{Cos}\,[(0)+(1)+\ldots+(m-1)].$$

Beweis. Zieht man von dem Eckpunkte m auf die Axe der x eine Senkrechte, und vom Eckpunkte m—1 eine Parallele zu derselben, so entsteht ein rechtwinkliches Dreieck m—1, m, Q; in diesem Δ ist



$(m, Q) = y_m - y_{m-1}$, $(m-1, Q) = x_m - x_{m-1}$. Bezeichnet man nun den Winkel m, m—1, Q, welchen die Seite des Polygones mit der positiven Halbaxe der einschliesst, und der zwischen 0° und 360° jeden beliebigen Werth annehmen hann, mit α, so hat man mit völliger Allgemeinheit:

$$y_m - y_{m-1} = (m-1,\,m)\,\mathrm{Sin}\,\alpha,$$
$$x_m - x_{m-1} = (m-1,\,m)\,\mathrm{Cos}\,\alpha.$$

Es ist aber in dem m + 2 Eck 0, 1, 2, 3, ... m — 1, m, P, je nachdem α in einem der vier Quadranten liegt, entweder

$$(0)+(1)+(2)+\ldots+(m-1)+180^0-\alpha = (m+2-2v)\,180^0,$$

oder

$$(0)+(1)+(2)+\ldots+(m-1)+180^0+360^0-\alpha = (m+2-2v)\,180^0,$$

wo v $\begin{matrix} > -\frac{m+2}{2} \\ < +\frac{m+2}{2} \end{matrix}$. Beide Fälle sind in der einzigen Formel enthalten:

$$(0)+(1)+(2)+\ldots+(m-1)-\alpha = (m-2v')\,180^0, \text{ wo } v' \begin{matrix} > -\frac{m+4}{2} \\ < +\frac{m+2}{2} \end{matrix}$$

hieraus folgt:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = (0) + (1) + (2) + \ldots + (m-1) - (m-1-2v) 180^{0}, \text{ wo } v \begin{array}{l} > -\frac{m+4}{2} \\ < +\frac{m+2}{2} \end{array} \\ \text{Sin } \alpha = \text{Cos}\,(m-1)\,180^{0}.\ \text{Sin}\,[(0)+(1)+\ldots+(m-1)] \\ \quad = (-1)^{m-1}\,\text{Sin}\,[(0)+(1)+\ldots+(m-1)] \\ \text{Cos } \alpha = \text{Cos}\,(m-1)\,180^{0}.\ \text{Cos}\,[(0)+(1)+\ldots+(m-1)] \\ \quad = (-1)^{m-1}\,\text{Cos}\,[(0)+(1)+\ldots+(m-1)] \end{array}\right\} \ldots\ldots 3.)$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man ganz allgemein:

$$\left.\begin{array}{l} y_m - y_{m-1} = (-1)^{m-1}\,(m-1,m)\,\text{Sin}\,[(0)+(1)+(2)+\ldots+(m-1)] \\ x_m - x_{m-1} = (-1)^{m-1}\,(m-1,m)\,\text{Cos}\,[(0)+(1)+(2)+\ldots+(m-1)] \end{array}\right\} \ldots 4.)$$

Diese Formeln haben eine **dependente** Form, sie bestimmen die Coordinaten eines Eckpunktes durch die Coordinaten der vorhergehenden Punkte. Man kann aber aus ihnen die **independente** Form leicht ableiten; setzt man nämlich voraus, dass der Coordinatenursprung sich im Eckpunkte 0 befindet, folglich $y_0 = 0$ und $x_0 = 0$ ist, und setzt man

$m = 1$, so wird $y_1 = (0,1)\,\text{Sin}\,(0)$

$x_1 = (0,1)\,\text{Cos}\,(0)$

$m = 2$, „ „ $y_2 = (0,1)\,\text{Sin}\,(0) - (1,2)\,\text{Sin}\,[(0)+(1)]$

$x_2 = (0,1)\,\text{Cos}\,(0) - (1,2)\,\text{Cos}\,[(0)+(1)]$

$m = 3$, „ „ $y_3 = (0,1)\,\text{Sin}\,(0) - (1,2)\,\text{Sin}\,[(0)+(1)] + (2,3)\,\text{Sin}\,[(0)+(1)+(2)]$

$x_3 = (0,1)\,\text{Cos}\,(0) - (1,2)\,\text{Cos}\,[(0)+(1)] + (2,3)\,\text{Cos}\,[(0)+(1)+(2)]$

. . . .

allgemein

$$\left.\begin{array}{l} y_m = (0,1)\,\text{Sin}\,(0) - (1,2)\,\text{Sin}\,[(0)+(1)] + (2,3)\,\text{Sin}\,[(0)+(1)+(2)] \\ \quad - \ldots + (-1)^{m-1}\,(m-1,m)\,\text{Sin}\,[(0)+(1)+\ldots+(m-1)] \\ x_m = (0,1)\,\text{Cos}\,(0) - (1,2)\,\text{Cos}\,[(0)+(1)] + (2,3)\,\text{Cos}\,[(0)+(1)+(2)] \\ \quad - \ldots + (-1)^{m-1}\,(m-1,m)\,\text{Cos}\,[(0)+(1)+\ldots+(m-1)] \end{array}\right\} 5.)$$

Beispiel. Es seien die Coordinaten der Eckpunkte einer gebrochenen Linie aus folgenden Angaben zu berechnen:

(0) =	36°. 14′. 20″	(0,1) =	125·37
(1) =	52. 26. 36	(1,2) =	335·34
(2) =	108. 7. 12	(2,3) =	277·51
(3) =	177. 33. 53	(3,4) =	205·43
(4) =	18. 12. 48	(4,5) =	308·55

(5) = 255°. 5′. 30″ (5,6) = 237·84

(6) = 73. 25. 44 (6,7) = 199·73.

Man ordnet die Rechnung tabellarisch an, um am schnellsten und sichersten zum Ziele zu kommen; auch werden 6 stellige Logarithmen ausreichen, indem die Seitenlängen nur in fünf Ziffern gegeben sind, von welchen die letzte kaum zuverlässig sein dürfte, indem wir annehmen, dass die Daten durch wirkliche Messung erhoben worden sind; folglich die 6te und folgenden Ziffern des Resultates auch zweifelhaft sein müssen. Folgendes Schema zeigt die ganze Rechnung:

Namen der Winkel	Winkelsumme = ∢ w	Log Sin. ∢ w	Log Cos. ∢ w	Log der Seite = Log s	Log s + L Sin. ∢ w = Log p	Log s + L Cos. ∢ w = Log q	p.	q.	y.	x.
(0)	36°.14′.20″	9·771700	9·906636	2·098194	1·869894	2·004830	74·113	101·118	74·113	101·118
(0) + (1)	88. 40. 56	9·999885	8·361681	2·525485	2·525370	0·887166	—335·251	— 7·712	—261·138	93·406
(0) + … + (2)	196. 48. 8	9·461002n	9·981052n	2·443279	1·904281n	2·424331n	— 80·220	—265·663	—341·358	—172·257
(0) + … + (3)	14. 22. 1	9·394681	9·986202	2·312664	1·707345	2·298866	— 50·973	—199·006	—392·331	—371·263
(0) + … + (4)	32. 34. 49	9·731170	9·925641	2·489326	2·220496	2·414967	166·148	259·996	—226·183	—111·267
(0) + … + (5)	287. 40. 19	9·979006n	9·482254	2·376285	2·355291n	1·858539	226·616	— 72·200	0·433	—183·467
(0) + … + (6)	1. 5. 43	8·281375	9·999921	2·300443	0·581818	2·300364	3·818	199·694	4·251	16·227

Es ist zu bemerken, dass in der Columne $\sphericalangle w$ nur der Ueberschuss der Winkelsumme über 360°, oder einem Vielfachen von 360° angesetzt, ferner in den Columnen p und q die Zeichen des 2ten, 4ten und 6ten Gliedes in die entgegengesetzten geändert, und so die successive Summirung vorgenommen worden, so wie es die Formeln 5.) erheischen.

§. 9.

Aus den Formeln 5.) lassen sich zwei Gleichungen ableiten, durch welche die Beziehungen unter den Umfangsstücken eines Polygones ausgedrückt werden. Man hat nämlich für einen beliebigen Eckpunkt m die Coordinaten:

$$y_m = (0,1)\ \mathrm{Sin}\ (0) - (1,2)\ \mathrm{Sin}\ [(0)+(1)] + (2,3)\ \mathrm{Sin}\ [(0)+(1)+(2)] - \ldots + (-1)^{m-1}(m-1,m)\ \mathrm{Sin}\ [(0)+(1)+\ldots+(m-1)]$$

$$x_m = (0,1)\ \mathrm{Cos}\ (0) - (1,2)\ \mathrm{Cos}\ [(0)+(1)] + (2,3)\ \mathrm{Cos}\ [(0)+(1)+(2)] - \ldots + (-1)^{m-1}(m-1,m)\ \mathrm{Cos}\ [(0)+(1)+\ldots+(m-1)]$$

Ebenso hat man, wenn man n zum Anfangspunkte der Coordinaten, die Seite (n,o) zur Abscissenaxe wählt, und die Coordinaten zur Unterscheidung mit einem Striche versieht:

$$y'_m = (n,n-1)\ \mathrm{Sin}\ (n) - (n-1,n-2)\ \mathrm{Sin}\ [(n),+(n-1)] + \ldots + (-1)^{n-m-1}(m+1,m)\ \mathrm{Sin}\ [(n)+(n-1)+\ldots(m+1)]$$

$$x'_m = (n,n-1)\ \mathrm{Cos}\ (n) - (n-1,n-2)\ \mathrm{Cos}\ [(n)+(n-1)] + \ldots + (-1)^{n-m-1}(m+1,m)\ \mathrm{Cos}\ [(n)+(n-1)+\ldots+(m+1)]$$

Nun ist $y_m = y'_m$ und $x_m + x'_m = (o,n)$

demnach hat man

$$\left.\begin{aligned}
&(0,1)\ \mathrm{Sin}\ (0) - (1,2)\ \mathrm{Sin}\ [(0)+(1)] + (2,3)\ \mathrm{Sin}\ [(0)+(1)+(2)] \\
&\quad - \ldots + (-1)^{m-1}(m-1,m)\ \mathrm{Sin}\ [(0)+(1)+\ldots+(m-1)] \\
&\quad = (n,n-1)\ \mathrm{Sin}\ (n) - (n-1,n-2)\ \mathrm{Sin}\ [(n)+(n-1)] \\
&\quad + \ldots + (-1)^{n-m-1}(m+1,m)\ \mathrm{Sin}\ [(n)+(n-1) \\
&\quad + \ldots + (m+1)], \\
&\text{und} \\
&(0,n) = (0,1)\ \mathrm{Cos}\ (0) - (1,2)\ \mathrm{Cos}\ [(0)+(1)] + (2,3)\ \mathrm{Cos}\ [(0) \\
&\quad + (1)+(2)] - \ldots + (-1)^{m-1}(m-1,m)\ \mathrm{Cos}\ [(0)+ \\
&\quad (1)+\ldots+(m-1)] + (n,n-1)\ \mathrm{Cos}\ (n) - (n-1,n-2) \\
&\quad \mathrm{Cos}\ [(n)+(n-1)] + \ldots + (-1)^{n-m-1}(m+1,m) \\
&\quad \mathrm{Cos}\ [(n)+(n-1)+\ldots+(m+1)].
\end{aligned}\right\} \ldots 6.)$$

Diese Gleichungen gelten für jeden beliebigen Werth von m; namentlich für m = n verwandeln sie sich in folgende:

$$\left.\begin{array}{l}(0,1)\,\mathrm{Sin}\,(0) - (1,2)\,\mathrm{Sin}\,[(0)+(1)] + (2,3)\,\mathrm{Sin}\,[(0)+(1)+(2)] \\ \quad - \ldots + (-1)^{n-1}(n-1,n)\,\mathrm{Sin}\,[(0)+\ldots+(n-1)] = 0 \\ (0,1)\,\mathrm{Cos}\,(0) - (1,2)\,\mathrm{Cos}\,[(0)+(1)] + (2,3)\,\mathrm{Cos}\,[(0)+(1)+(2)] \\ \quad - \ldots + (-1)^{n-1}(n-1,n)\,\mathrm{Cos}\,[(0)+\ldots+(n-1)] = (0,n)\end{array}\right\} \ldots 7.)$$

Sie sind mit Einschluss der Gleichung 2.) die Fundamental-Gleichungen der Polygonometrie, und dienen zur Bestimmung von 3 Umfangsstücken aus den übrigen. Hierdurch bestätigt sich der im §. 5. ausgesprochene Lehrsatz, dass in einem Polygone 3 Stücke durch die übrigen bestimmt seien, nur dürfen sie nicht sämmtlich Seiten sein, weil die Gleichung 2.) keine Seiten in sich enthält, demnach zur Bestimmung einer unbekannten Seite untauglich ist.

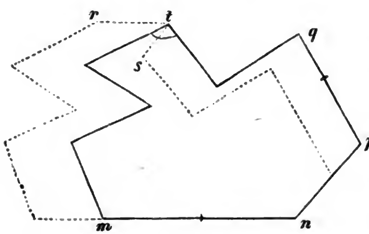
§. 10.

Aus den §. §. 5. 9. haben wir ersehen, dass drei Umfangsstücke (mit Ausnahme von 3 Seiten) durch die übrigen bestimmt sind. Sind demnach in einem Polygone alle Umfangsstücke, bis auf drei, gemessen, so können die Unbekannten (mit steter Rücksicht auf die Ausnahmen) immer gefunden werden. Diese können entweder 2 Seiten und 1 Winkel, oder 1 Seite und 2 Winkel, oder endlich 3 Winkel sein, welche 3 Fälle zu ebenso vielen Aufgaben Veranlassung geben.

§. 11.

Aufgabe. In einem Polygone sind 2 Seiten und 1 Winkel unbekannt, das Polygon aufzulösen.

Auflösung. a) Durch Construction. Es sei das beiliegende Polygon zu construiren, in welchem die Seiten (m,n) (p,q) und der Winkel (t) unbekannt sein sollen. Man beginne die Construction mit einer bekannten Seite, construire das Polygon rechts und links,



bis man auf die unbekannten Seiten stösst, dann nehme man für diese willkürliche Längen, und fahre mit der Construction fort, bis man auf beiden Seiten zu dem unbekannten Winkel gelangt.

Hätte man nun für die unbekannten Seiten die wahren Werthe errathen, so müssten die Endpunkte r und s beider Constructionen (die sogenannten Schlusspunkte) zusammenfallen, d. h. das Polygon müsste sich schliessen. Wenn aber dies nicht stattfindet, beweist es, dass man für die unbekannten Seiten nicht die wahren Werthe getroffen hat; in diesem Falle müssen die angenommenen Längen so geändert werden, dass das Polygon sich schliesse. Um dies zu erreichen, denken wir uns diejenigen Theile des Polygones, welche zwischen den unbekannten Seiten und den Schlusspunkten liegen, längs den unbekannten Seiten parallel verschoben, bis die Schlusspunkte auf einander fallen, so beschreiben die Schlusspunkte r und s zwei gerade Linien, welche mit den respectiven unbekannten Seiten parallel liegen. Diese Linien schneiden sich in t, und die Längen r t und s t sind die Aenderungen an den willkürlich gewählten Werthen von (m, n) und (p, q). Mit den so verbesserten Längen dieser Seiten wiederhole man die Construction, und das Polygon wird sich schliessen, wobei der Schlusspunkt kein anderer sein wird, als der Punkt t; zu gleicher Zeit ergibt sich auch der unbekannte Winkel an dem Punkte t. Aus dieser Construction ist ersichtlich, dass aus den gegebenen Bestimmungsstücken nur ein einziges Polygon construirt werden kann, indem 2 gerade Linien sich nur in einem einzigen Punkte schneiden können. Eine Ausnahme findet statt, wenn die unbekannten Seiten parallel sind, in welchem Falle die Linien r t und s t Theile einer und derselben Geraden sind, folglich gehörig verlängert sich decken müssen, was darauf hinweiset, dass die Aufgabe unbestimmt ist. Die Auflösung kann endlich auch unmöglich werden, wenn einer der Abschnitte r t oder s t der Lage nach entgegengesetzt, und grösser ausfällt, als die respective Seite, woraus hervorgeht, dass es nicht immer möglich ist, aus 2 n - 3 willkürlich gewählten Umfangsstücken ein Polygon zu bilden.

b) Durch Rechnung. Man wähle eine der unbekannten Seiten zur Abscissenaxe, und stelle für den Endpunkt, in welchem der unbekannte Winkel liegt, die Fundamental-Gleichungen 6.) auf, so hat man zwei Gleichungen des ersten Grades mit 2 Unbekannten, welche aufgelöst die Werthe der unbekannten Seiten geben werden. Der unbekannte Winkel ergibt sich aus der Gleichung 2.). Aus dieser Auflösung ist ersichtlich, dass nur ein einziges Polygon entstehen kann, mit Ausnahme des Falles, wenn die

unbekannten Seiten parallel sind. Nehmen wir an, die Seite (m — 1, m) sei mit (0, n) parallel, so ist nach 4.)

$$y_m - y_{m-1} = (-1)^{m-1} (m-1, m) \operatorname{Sin} [(0) + (1) + \ldots + (m-1)]$$

oder

$$(m-1, m) = (-1)^{m-1} \frac{y_m - y_{m-1}}{\operatorname{Sin} [(0) + (1) + \ldots + (m-1)]}$$

Aber unter der Bedingung des Parallelismus sind $y_m - y_{m-1} = 0$, und $(0) + (1) + (2) + \ldots + (m-1) + 2.90^0 = (m+2-2v) 180^0$, demnach $\operatorname{Sin} [(0) + (1) + \ldots + (m-1)] = 0$, folglich erscheint $(m-1, m)$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$. Es folgt daraus, dass (m — 1, m) alle möglichen Werthe annehmen kann, d. h. aus den Daten unendlich viele Polygone construirt werden können. Soll demnach ein Polygon aus den Umfangsstücken festgestellt werden, so dürfen zwei parallele Seiten nicht ungemessen bleiben. Führt die Auflösung der Aufgabe zu negativen Resultaten, dann ist das Polygon unmöglich, weil nach der Natur der Sache die Polygonseiten stets positiv sind.

Beispiel. In einem 8 Ecke sind gegeben:

(0) =	45°.	10′.	12″	(0, 1) = 101·38
(1) =	265.	1.	5	(1, 2) = 132·94
(2) =	94.	52.	30.	(2, 3) = 143·51
(4) =	310.	9.	22.	(3, 4) = 449·88
(5) =	280.	41.	3.	(5, 6) = 234·75
(6) =	315.	0.	50.	(6, 7) = 212·46
(7) =	91.	2.	8.	

die Unbekannten (3), (4, 5) und (7, 0) zu bestimmen. Man hat aus 6.)

$$(0,1) \operatorname{Sin}(0) - (1,2) \operatorname{Sin}[(0)+(1)] + (2,3) \operatorname{Sin}[(0)+(1)+(2)] = (7,6) \operatorname{Sin}(7) - (6,5) \operatorname{Sin}[(7)+(6)] + (5,4) \operatorname{Sin}[(7)+(6)+(5)] - (4,3) \operatorname{Sin}[(7)+(6)+(5)+(4)]$$

$$(0,7) = (0,1) \operatorname{Cos}(0) - (1,2) \operatorname{Cos}[(0)+(1)] + (2,3) \operatorname{Cos}[(0)+(1)+(2)] + (7,6) \operatorname{Cos}(7) - (6,5) \operatorname{Cos}[(7)+(6)] + (5,4) \operatorname{Cos}[(7)+(6)+(5)] - (4,3) \operatorname{Cos}[(7)+(6)+(5)+(4)];$$

die numerische Rechnung selbst wird nach folgendem Schema ausgeführt:

Namen der Winkel	∢ w	Log Sin ∢ w	Log Cos ∢ w	Log s	Log p	Log q	p.	q.
(0)	45°. 10′. 12″	9·850770	9·848193	2·005952	1·856722	1·854145	71·899	71·474
(0) + (1)	310. 11. 17.	9·883053n	9·809760	2·123656	2·006709n	1·933416	101·557	— 85·786
(0) + (1) + (2)	45. 3. 47.	9·849963	9·849006	2·156882	2·006845	2·005888	101·589	101·365
(7)	91. 2. 8.	9·999929	8·257027n	2·327277	2·327206	0·584304n	—212·425	— 3·840
(7) + (6)	46. 2. 58.	9·857295	9·841382	2·370606	2·227901	2·211988	169·006	—162·925
(7) + (6) + (5)	326. 44. 1.	9·739202n	9·922273	2·593247		2·515520		327·733
(7)+(6)+...+(4)	276. 53. 23.	9·996852n	9·079032	2·653097	2·649949n	1·732129	—446·631	— 53·967
							444·051	500·572
							—659·056	—306·518
							—215·005	194·054 = (0,7)

Die erstere Formel reducirt sich nun auf folgenden Ausdruck:

$$-215\cdot005 = (4,5)\,\mathrm{Sin}\,[(7)+(6)+(5)],$$

oder wenn man die Gleichung nach (4,5) auflöst, und auf Logarithmen übergeht:

$$\begin{aligned} \text{Log}\ (4,5) &= 2\cdot332449\,\text{n} \\ &- 9\cdot739202+10\text{n} \\ \hline &\ \ 2\cdot593247 \end{aligned}$$

hieraus folgt

$$(4,5) = 391\cdot965.$$

Dieser Werth wird nun an der entsprechenden Stelle der Columne Log s eingeschaltet, und die Rechnung ergänzt. Für den unbekannten Winkel findet man endlich aus 2.), wenn man $v=0$ setzt, den Werth:

$$(3) = 38^0.\ 2'.\ 50''$$

Es ist zu bemerken, dass in der Columne $\measuredangle$ w nur der Ueberschuss der Winkelsumme über 360^0, oder einem Vielfachen von 360^0 angesetzt ist; ferner in den Columnen p, q sind die Zeichen den Fundamental-Formeln 6.) gemäss geändert worden.

§. 12.

Aufgabe. In einem Polygone sind eine Seite und 2 Winkel unbekannt, dasselbe aufzulösen.

Auflösung. Wir unterscheiden bei dieser Aufgabe 3 Fälle.

1) Die unbekannten Winkel liegen an der unbekannten Seite.

2) Die unbekannten Winkel liegen nicht an der unbekannten Seite, jedoch sie folgen auf einander unmittelbar.

3) Die unbekannten Winkel liegen zerstreut im Polygone.

Lösung des 1. Falles. a) Durch Construction. Man fange die Construction an bei irgend einer bekannten Seite, construire das Polygon rechts und links, bis man auf die unbekannten Winkel stösst. Verbindet man die Endpunkte der Construction mittelst einer geraden Linie, so ergibt sich die gesuchte Seite, nebst den 2 unbekannten Winkeln.

b) Durch Rechnung. Man wähle jene Seite des Polygones zur Abscissenaxe, und denjenigen Eckpunkt zum Anfangspunkte der Coordinaten, welcher der Unbekannten unmittelbar vorangeht. Es seien nun (n—1), (n—1, n) und (n) unbekannt, und man stellt für den Eckpunkt n—1 die Fundamental-Gleichungen 6.) auf, so erhält man:

$$(n-1,n)\,\text{Sin}(n) = (0,1)\,\text{Sin}\,(0) - (1,2)\,\text{Sin}\,[(0)+(1)] + (2,3)\,\text{Sin}\,[(0)+(1) + (2)] - \ldots + (-1)^{n-1}(n-2,n-1)\,\text{Sin}\,[(0)+\ldots+(n-1)] = y_{n-1}$$

$$(n-1,n)\,\text{Cos}\,(n) = (0,1)\,\text{Cos}\,(0) - (1,2)\,\text{Cos}\,[(0)+(1)] + (2,3)\,\text{Cos}[(0) + (1)+(2)] - \ldots + (-1)^{n-1}(n-2,n-1)\,\text{Cos}\,[(0)+\ldots+(n-1)] = (n,0) - x_{n-1}$$

Quadrirt und addirt man diese 2 Gleichungen, so entsteht

$$(n-1,n)^2 = y_{n-1}^2 + [n,0) - x_{n-1}]^2 \ \ldots\ldots 8.)$$

oder entwickelt:

$$\begin{aligned}(n-1,n)^2 = {} & (n,0)^2 + (0,1)^2 + (1,2)^2 + (2,3)^2 + \ldots + (n-2,n-1)^2 \\ & -2(n,0)(0,1)\,\mathrm{Cos}\,(0) + 2(n,0)(1,2)\,\mathrm{Cos}\,[(0)+(1)] - 2(n,0) \\ & \quad (2,3)\,\mathrm{Cos}\,[(0)+(1)+(2)] + \ldots \\ & -2(0,1)(1,2)\,\mathrm{Cos}\,(1) + 2(0,1)(2,3)\,\mathrm{Cos}\,[(1)+(2)] - 2(0,1) \\ & \quad (3,4)\,\mathrm{Cos}\,[(1)+(2)+(3)] + \ldots \\ & -2(1,2)(2,3)\,\mathrm{Cos}(2) + 2(1,2)(3,4)\,\mathrm{Cos}\,[(2)+(3)] - 2(1,2) \\ & \quad (4.5)\,\mathrm{Cos}\,[(2)+(3)+(4)] + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & -2(n-3,n-2)(n-2,n-1)\,\mathrm{Cos}(n-2) \ \ldots\ldots 8'.)\end{aligned}$$

Diese Formel lässt sich mit Worten so aussprechen: **Das Quadrat der unbekannten Seite ist gleich der Summe der Quadrate aller bekannten Seiten, $\pm$ dem doppelten Producte je zweier bekannten Seiten, multiplicirt mit dem Cosinus der Summe der zwischen ihnen eingeschlossenen Winkel, wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Anzahl der eingeschlossenen Winkel gerade oder ungerade ist.** Aus diesen Formeln ergeben sich für die unbekannte Seite zwei gleiche, aber dem Zeichen nach entgegengesetzte Werthe, von welchen aber, nach der Natur der Aufgabe, nur der positive zulässig ist. Substituirt man diesen Werth in die obigen Formeln, so erhält man für den Winkel (n) zwei Ausdrücke, nämlich

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Sin}\,(n) &= \frac{y_{n-1}}{(n,-1)\,n)} \\ \mathrm{Cos}\,(n) &= \frac{(0,n) - x_{n-1}}{(n,-1,n)}\end{aligned}\right\} \ldots\ldots 9.)$$

Dadurch wird die Auflösung vollkommen bestimmt, indem man aus den Zeichen dieser Funktionen entscheiden kann, in welchem Quadranten der Winkel liegen muss.

Man kann die Auflösung auch umgekehrt anordnen, indem man aus den obigen zwei Hauptgleichungen durch Division bekommt:

$$\mathrm{tg}\,(n) = \frac{y_{n-1}}{(0,n) - x_{n-1}} \ \ldots\ldots 10.)$$

Die Zeichen des Zählers und Nenners, welche in ihrer ursprünglichen Form mit den Zeichen des Sinus und Cosinus über-

einstimmen, geben den Quadranten genau zu erkennen, in welchem der Winkel (n) liegt; mit diesem Werthe von (n) findet man dann aus den Hauptgleichungen (n—1, n) durch eine der zwei Formeln:

$$\left.\begin{aligned}(n-1, n) &= \frac{y_{n-1}}{\text{Sin}\,(n)}\\ (n-1, n) &= \frac{(0, n) - x_{n-1}}{\text{Cos}\,(n)}\end{aligned}\right\} \ldots\ldots 11.)$$

Der zweite unbekannte Winkel (n — 1), wird endlich aus der Formel 2.) gefunden.

Auf diese Weise kann in einem Polygone auch eine beliebige Diagonale nebst den 2 anliegenden Winkeln berechnet werden.

Beispiel. In einem 8 Ecke sind gegeben:

(0) =	30°.	10′.	25″.	(0,1) = 857·35
(1) =	75.	7.	28.	(1,2) = 985·20
(2) =	154.	36.	50.	(2,3) = 439·71
(3) =	209.	41.	16.	(3,4) = 603·56
(4) =	55.	37.	9.	(4,5) = 395·93
(5) =	87.	6.	24.	(5,6) = 582·44
				(7,0) = 880·65

die unbekannten Stücke (6), (6,7) und (7) zu bestimmen. Man berechnet zuerst die Coordinaten des Punktes 6 nach folgendem Schema:

Namen der Winkel	∢ w	Log Sin ∢ w	Log Cos ∢ w	Log s	Log p	Log q	p.	q.
(0)	30°. 10′. 25″	9·701241	9·986768	2·933158	2·634399	2·869926	430·922	741·183
(0)+(1)	105. 17. 53.	9·984332	9·421341n	2·993524	2·977856	2·414865n	— 950·290	259·935
(0)+(1)+(2)	259. 54. 43.	9·993233n	9·243439n	2·643166	2·636399n	1·886605n	— 432·911	— 77·020
(0)+...+(3)	109. 35. 59.	9·974077	9·525624n	2·780720	2·754797	2·306344n	— 568·587	202·462
(0)+...+(4)	165. 13. 8.	9·406756	9·985384n	2·597618	2·004374	2·583002n	101·012	—382·826
(0)+...+(5)	252. 19. 32.	9·979000n	9.482314n	2·765251	2·744251n	2·247565n	554·946	—176·834
							1086·880	1380·414
							—1951·788	—459·846
							— 864·908	920·568
							$= y_6$	$= x_6$

Mit diesen Werthen findet man aus 8.)

$$(6,7)^2 = (-864{\cdot}908)^2 + (880{\cdot}65 - 920{\cdot}568)^2 = (-864{\cdot}908)^2 + (-39{\cdot}918)^2$$

und $(6,7) = 865{\cdot}829$, $\text{Log}\,(6,7) = 2{\cdot}937432$;

folglich aus 9.)

$$\text{Sin}\ (7) = \frac{-864{\cdot}908}{865{\cdot}822}{,}$$

$$\text{Cos}\ (7) = -\frac{39{\cdot}918}{865{\cdot}829}$$

Diese Formeln deuten an, dass der Winkel (7) im 3ten Quadranten liegen muss; übergeht man auf Logarithmen, so erhält man:

Log Sin (7) = 2·936970n	Log Cos (7) = 1·601169n
— 2·937432	— 2·937432
9·999538n	8·663737n

und der entsprechende spitzige Winkel ist:

$87^0\ 21'\ 30''$ $\qquad$ $87^0\ 21'\ 27''$

Der zweite Werth ist dem ersten vorzuziehen, weil die Sinusse in der Gegend von 90^0 sich sehr wenig ändern, folglich aus ihnen auf den Bogen nicht sicher geschlossen werden kann. Mit diesem Werthe wird dann

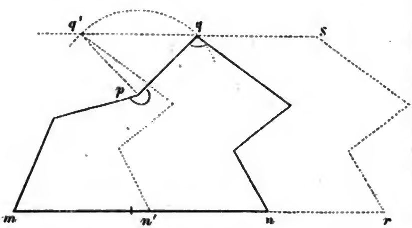
$$(7) = 267^0.\ 21'.\ 27''$$

Endlich ergibt sich aus 2.), wenn man $v = 1$ setzt,

$$(6) = 200^0.\ 19'.\ 1''$$

§. 13.

Lösung des zweiten Falles. a) Durch Construction.



Die beiliegende Figur stelle das gegebene Polygon dar, in welchem die Seite (m,n), nebst den Winkeln (p) und (q) unbekannt sein sollen. Man beginne die Construction mit der unbekannten Seite, nehme für sie eine beliebige Länge m r, und construire das Polygon rechts und links bis zu den unbekannten Winkeln. Hätte man nun für die unbekannte Seite die wahre Länge errathen, so müsste der Abstand p s gleich sein der bekannten Polygonseite p q; ist dies nicht der Fall, dann muss die Länge m r geändert werden. Denken wir uns nun den Theil r s des Polygones zwischen der unbekannten Seite und dem unbekannten Winkel längs der Seite m r parallel verschoben, so beschreibt der Endpunkt s der Construction eine Parallele zu m r, auf dieser Parallele gibt es einen, oder mehrere Punkte, deren Abstände von dem anderen Endpunkte p der Construction der Polygonseite (p q) gleich sind, und diese

Punkte liegen in einem Kreise, dessen Mittelpunkt p, und Halbmesser (pq) ist. Solche Punkte existiren in der Regel zwei, q und q′, weil ein Kreis von einer geraden Linie in der Regel in zwei Punkten geschnitten wird, und die Linien s q und s q′ sind die Verbesserungen, welche an der willkührlich gewählten Länge m r angebracht werden müssen, um das Polygon bei einer nochmaligen Construction zum Schlusse zu bringen. Man erhält demnach in der Regel zwei von einander verschiedene Polygone, mit Ausnahme eines einzigen Falles, nämlich wenn der Kreis die gerade Linie berührt; denn unter dieser Bedingung fallen beide Polygone zusammen. Die Auflösung kann endlich auch unmöglich sein, wenn entweder die gerade Linie vom Kreise gar nicht geschnitten wird, oder die Längen s q und s q′ grösser ausfallen als m r, und nebstbei die entgegengesetzte Lage haben.

b) Durch Rechnung. Man wähle die unbekannte Seite zur Abscissenaxe, und stelle die Gleichungen 6.) für einen der unbekannten Winkelecken m — 1 oder m auf, so erhält man:

$$(0,1)\mathrm{Sin}(0)-(1,2)\,\mathrm{Sin}[(0)+(1)]+\ldots+(-1)^{m-1}(m-1,m)\mathrm{Sin}[(0)+(1)+\ldots+(m-1)]=(n,n-1)\mathrm{Sin}(n)-(n-1,n-2)\mathrm{Sin}[(n)+(n-1)]+\ldots$$

$$(0,n)=(0,1)\,\mathrm{Cos}(0)-(1,2)\,\mathrm{Cos}\,[(0)+(1)]+(2,3)\,\mathrm{Cos}\,[(0)+(1)+(2)]-\ldots+(n,n-1)\mathrm{Cos}(n)-(n-1,n-2)\mathrm{Cos}[(n)+(n-1)]+\ldots$$

Die erste dieser Gleichungen gibt nach Ausführung der numerischen Rechnung, und Reduction einen Ausdruck von der Form:

$$\mathrm{Sin}[(0)+(1)+(2)+\ldots+(m-1)]=A$$

wo A eine positive, oder negative bekannte Zahl bedeutet. Nehmen wir nun an, A sei positiv, α ein spitzer Winkel, dessen Sinus = A ist, und k eine beliebige ganze positive Zahl, so wird

$$(0)+(1)+(2)+\ldots+(m-1)=\left\{\begin{matrix}2\,k.\,180^0+\alpha\\(2\,k+1)\;180^0-\alpha\end{matrix}\right\}$$

folglich

$$(m-1)=\left\{\begin{matrix}2k.\,180^0+\alpha-[(0)+(1)+(2)+\ldots+(m-2)]\\(2k+1)180^0-\alpha-[(0)+(1)+(2)+\ldots+(m-2)]\end{matrix}\right\}\ldots\,12.)$$

Wenn hingegen A negativ ist, und α ein spitzer Winkel, dessen Sinus = — A ist, dann hat man

$$(0)+(1)+(2)+\ldots+(m-1)=\left\{\begin{matrix}(2\,k-1).\,180^0+\alpha\\2\,k.\,180^0-\alpha\end{matrix}\right\}$$

folglich

$$(m-1)=\left\{\begin{matrix}(2k-1).180^0+\alpha-[(0)+(1)+(2)+\ldots+(m-2)]\\2k.180^0-\alpha-[(0)+(1)+(2)+\ldots+(m-2)]\end{matrix}\right\}\;12')$$

In beiden Fällen erhält (m—1) unendlich viele Werthe, indem

*

man für k unendlich viele Werthe setzen kann; diese Auflösungen jedoch reduciren sich auf zwei, indem alle negativen, und alle 360° übersteigenden positiven Werthe, als der Natur der Aufgabe zuwider, ausgeschlossen werden müssen.

Substituirt man diese Werthe in der zweiten Gleichung, so ergeben sich für die unbekannte Seite (0, n) ebenfalls zwei Werthe. Ebenso viel erhält man auch aus 2.) für den Winkel (n). Aus den Bestimmungsstücken der Aufgabe lassen sich demnach zwei Polygone bilden. Nur eine Auflösung findet statt, wenn $A = \pm 1$, demnach $\alpha = 90^\circ$, weil in diesem Falle beide Werthe von (m—1) zusammenfallen. Die Auflösung ist endlich unmöglich, wenn $A \begin{smallmatrix} > +1 \\ < -1 \end{smallmatrix}$, oder auch wenn $(0,n) < 0$ ausfällt.

Beispiel. In einem 6 Ecke sind gegeben

(0) = 45°. 10′. 20″.	(0,1) = 301·84
(1) = 94. 58. 8.	(1,2) = 349·68
(4) = 106. 22. 36.	(2,3) = 904·25
(5) = 121. 3. 5.	(3,4) = 520·32
	(4,5) = 472·91

die unbekannten Stücke (2), (3) und (0,5) zu bestimmen. Man hat aus 6.) die Gleichungen

$$(0,1)\,\mathrm{Sin}(0) - (1,2)\,\mathrm{Sin}[(0)+(1)] + (2,3)\,\mathrm{Sin}[(0)+(1)+(2)] = (5,4)\,\mathrm{Sin}(5) - (4,3)\,\mathrm{Sin}[(5)+(4)]$$

$$(0,5) = (0,1)\,\mathrm{Cos}(0) - (1,2)\,\mathrm{Cos}[(0)+(1)] + (2,3)\,\mathrm{Cos}[(0)+(1)+(2)] + (5,4)\,\mathrm{Cos}(5) - (4,3)\,\mathrm{Cos}[(5)+(4)]$$

Die numerische Rechnung gestaltet sich folgendermassen:

Namen der Winkel	∢ w	Log Sin ∢ w	Log Cos ∢ w	Log s	Log p	Log q	p	q	
(0)	45°. 10′. 20″	9·850786	9·848176	2·479777	2·330563	2·327953	214·073	212·791	
(0)+(1)	140. 8. 28	9·806790	9·885149n	2·543671	2·350461	2·428820n	— 224·110	268·423	
(0)+(1)+(2)	{61. 59. 39 / 118. 0. 31}		9·671692 {p / n}	2·956288		2·627980 {p / n}		± 424·600	
(5)	121. 3. 5	9·932832	9·712486n	2·674778	2·607610	2·387264n	— 405·145	—243·930	
(5)+(4)	227. 25. 41	9·867131n	9·830278n	2·716270	2·583401n	2·546548n	—383·179	352·004	
							214·073	1257·818	
							—1012·434	—243·930	
							— 798·361	1013·888	= (0,5)
								833·218	
								—668·530	
								—164·688	= (0,5)

Die erste Gleichung reducirt sich nun auf

$$-798{\cdot}361 + (2,3)\,\mathrm{Sin}\,[(0)+(1)+(2)] = 0;$$

löset man sie nach Sin [(0) + (1) + (2)] auf, und geht auf Logarithmen über, so erhält man

$$\text{Log Sin}\,[(0)+(1)+(2)] = 2{\cdot}902199$$
$$-\,2{\cdot}956288$$
$$\overline{9{\cdot}945911}$$

Der entsprechende spitze Winkel ist $= 61^0\ 59'\ 59''$, folglich nach 12.)

$$(2) = \begin{Bmatrix} 2\,\text{k}.\ 180^0 + 61^0.59'.39'' - 140^0.8'.28'' \\ (2\,\text{k}+1)\ 180^0 - 61^0.59'.39'' - 140^0.8'.28'' \end{Bmatrix};$$

setzt man in diesen Ausdrücken $\text{k}=1$, so ergeben sich die einzig brauchbaren Werthe $(2) = \begin{Bmatrix} 281^0.\ 51'.\ 11'' \\ 337.\ \ 51.\ \ 53 \end{Bmatrix}$.

Mit diesen Werthen wird nun die Rechnung ergänzt, und man erhält

$$(0,5) = \begin{Bmatrix} 1013{\cdot}888 \\ 164{\cdot}688 \end{Bmatrix},$$

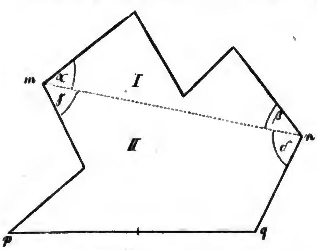
endlich ergibt sich aus 2.), wenn man $\text{v}=1$ setzt,

$$(3) = \begin{Bmatrix} 70^0.\ 34'.\ 40'' \\ 14.\ \ 33.\ \ 58 \end{Bmatrix}.$$

Nebst den in den früheren Beispielen in Bezug auf die Columnen p und q gemachten Bemerkungen ist hier noch zu beachten, dass sowohl die oberen, als die unteren der eingeklammerten zwei Zahlenwerthe der Grössen (2), (3) und (0,5) zusammengehören.

§. 14.

L ö s u n g d e s d r i t t e n F a l l e s. Man denke sich die Scheitel der zwei unbekannten Winkel m und n durch eine Diagonale verbunden, so zerfällt das Polygon in zwei andere I und II; im ersteren sind unbekannt die Seite (m, n) und die anliegenden Winkel α und β; im letzteren zwei Seiten (m, n), (p, q) und zwei Winkel γ und δ. Das erste Polygon kann nach §. 12 aufgelöst werden, dadurch wird (m, n) bekannt; es bleiben demnach im Polygone II nur eine Seite, und 2 aufeinanderfolgende Winkel unbekannt, welche nach dem §. 13 gefunden werden können. Aus den Winkeln α, β, γ, δ, ergeben sich dann durch



gehörige Verbindung die wahren Polygonwinkel (m) und (n). Oft ist es nothwendig, statt des einen oder des anderen dieser Winkel die Ergänzungswinkel zu setzen; eine ungefähre Kenntniss der Unbekannten, oder eine Handzeichnung, welche aus den Daten stets angefertigt werden kann, leistet bei der Beurtheilung dieser Umstände die besten Dienste, und die Gleichung 2.), welche stets erfüllt werden muss, zeigt eine unrichtige Verbindung der obigen 4 Winkel zuverlässig an. Wir erhalten in der Regel 2 Auflösungen, weil das Polygon II im Allgemeinen 2 verschiedene Formen besitzt, und an die Diagonale m, n beide Polygone angesetzt werden können, es wäre denn, dass eine oder die andere dieser Formen wegen der Ausnahmsfälle des vorigen §. unzulässig wäre.

Beispiel. In einem 8 Ecke sind gegeben

(0) = 76°. 52′	(0,1) = 200·35
(1) = 250. 35	(1,2) = 181·20
(3) = 50. 3.	(2,3) = 339·50
(4) = 276. 15.	(3,4) = 405·25
(5) = 220. 34.	(4,5) = 185·85
(7) = 36. 22.	(5,6) = 218·70
	(6,7) = 362·05

die unbekannten Stücke (2), (6) und (0,7) zu berechnen. Man löst zuerst das Polygon 2, 3, 4, 5, 6 auf, in welchem die Seite (2, 6), respective Diagonale des vorgelegten Polygons, und die anliegenden Winkel α und β unbekannt sind.

Da wir ein Beispiel dieser Art in §. 12 ausführlich behandelt haben, so ist eine solche Weitläufigkeit in diesem Falle überflüssig, deshalb werden wir nur die Hauptresultate anführen. Man findet für die Coordinaten des Punktes 6, bezogen auf ein Coordinatensystem, dessen Ursprung in 3, und Axe der x die Linie 3,2 ist, die Werthe

$$y_6 = 387{\cdot}64$$
$$x_6 = -\ 111{\cdot}53;$$

aus diesen folgt nach 10.)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{387{\cdot}66}{451{\cdot}93},$$

und

$$\alpha = 40^0.\ 40'.\ 40'',$$

welcher Winkel ein spitziger sein muss, weil Zähler und Nenner

des die tg α darstellenden Bruches positiv sind. Ferner findet man aus 2.), indem man $v = 0$ setzt,

$$\beta = 312^0.\ 27'.\ 20''$$

und aus 11.)

$$(2,6) = 594{\cdot}72.$$

Dann wird das Polygon 0, 1, 2, 6, 7 aufgelöst, in welchem die Seite (0,7) und die Winkel an der Seite, respective Diagonale (2,6), welche wir mit γ und δ bezeichnen wollen, unbekannt sind. Man findet nach dem Schema des §. 13 mit Rücksicht auf die sich ergebende Verschiedenheit

$$\gamma = \begin{Bmatrix} 220^0.\ 4'.\ 40'' \\ 25.\ \ 1.\ \ 20 \end{Bmatrix},\ \delta = \begin{Bmatrix} 310^0.\ 6'.\ 20'' \\ 151.\ \ 9.\ \ 40 \end{Bmatrix},\ (0,7) = \begin{Bmatrix} -\ 405{\cdot}28 \\ +\ 773{\cdot}92 \end{Bmatrix}$$

Die erstere der zwei Auflösungen ist unzulässig, weil die unbekannte Seite einen negativen Werth bekommt; aus der letzteren hingegen, in Verbindung mit dem Polygone 2, 3, 4, 5, 6, ergeben sich die Polygonwinkel

$$(2) = \alpha + \gamma = 65^0.\ 42'$$
$$(3) = \delta - 360^0 + \beta = 103^0.\ 37'$$

und zur Probe der Richtigkeit der Auflösung ist die Winkelsumme

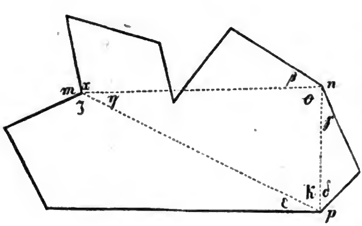
$$s = 1080^0,$$

was mit der Formel 1.) vollkommen im Einklange steht.

§. 15.

Aufgabe. In einem Polygone sind 3 Winkel unbekannt, diese zu bestimmen.

Auflösung. Es seien die Winkel (m), (n), (p) unbekannt, man ziehe die Diagonalen mn, np, pm, so zerfällt das Polygon in 3 Polygone, in welchen je eine Seite (die Diagonale), sammt den anliegenden Winkeln unbekannt sind, und in ein Dreieck, dessen Seiten aus den 3 Diagonalen des Polygons bestehen. Durch Auflösung der Polygone ergeben sich die Diagonalen, sammt den Winkeln α, β, γ, δ, ε, ζ. Durch Auflösung des Dreieckes, dessen Seiten nunmehr bekannt geworden sind, ergeben sich die Winkel η, ϑ, $\varkappa$.



Verbindet man nun $\alpha\,\eta\,\zeta$, $\beta\,\vartheta\,\gamma$ und $\delta\,\varkappa\,\varepsilon$ unter einander, so erhält man endlich die Polygonwinkel (m), (n), (p), wobei die im vorigen §. gemachte Bemerkung in Bezug der Zusammensetzung der erwähnten Winkel in aller Kraft bleibt. Es ist noch zu bemerken, dass aus den gegebenen Umfangsstücken zwei Polygone construirt werden können, indem man die Theilpolygone sowohl innerhalb, als ausserhalb des Dreieckes auftragen kann.

§. 16.

Aufgabe. Aus den orthogonalen Coordinaten die Umfangsstücke und Diagonalen eines Polygones zu bestimmen.

Auflösung. Zur Bestimmung der Seite m—1, m hat man die bekannte Relation aus der analytischen Geometrie

$$(m-1,m)^2=(x_m-x_{m-1})^2+(y_m-y_{m-1})^2$$

Nach derselben Formel findet man auch eine beliebige Diagonale, man darf nur die Stellenzeiger gehörig vertauschen.

Zur Bestimmung des Winkels (m) ergibt aus 4.)

$$y_m-y_{m-1}=(-1)^{m-1}(m-1,m)\mathrm{Sin}[(0)+(1)+\ldots+(m-1)]$$
$$x_m-x_{m-1}=(-1)^{m-1}(m-1,m)\mathrm{Cos}[(0)+(1)+\ldots+(m-1)]$$
$$y_{m+1}-y_m=(-1)^m(m+1,m)\mathrm{Sin}[(0)+(1)+\ldots+(m-1)+(m)]$$
$$x_{m+1}-x_m=(-1)^m(m+1,m)\mathrm{Cos}[(0)+(1)+\ldots+(m-1)+(m)]$$

Multiplicirt man die 1ste dieser Gleichungen mit der 4ten, und subtrahirt davon das Product aus der 2ten in die 3te, so erhält man

$$\mathrm{Sin}\,(m)=\frac{(x_{m+1}-x_m)(y_m-y_{m-1})-(y_{m+1}-y_m)(x_m-x_{m-1})}{(m+1,m)(m,m-1)}\ \ldots 13.)$$

oder multiplicirt man die 2te mit der 4ten, und addirt dazu das Product aus der 1sten in die 3te, so wird

$$\mathrm{Cos}(m)=-\frac{(x_{m+1}-x_m)(x_m-x_{m-1})+(y_{m+1}-y_m)(y_m-y_{m-1})}{(m+1,m)(m,m-1)}\ ..13'.)$$

Durch diese zwei Gleichungen wird (m) unzweifelhaft bestimmt. Dividirt man die erstere durch die letztere, so ergibt sich

$$\mathrm{tg}\,(m)=\frac{(x_{m+1}-x_m)(y_m-y_{m-1})-(y_{m+1}-y_m)(x_m-x_{m-1})}{-(x_{m+1}-x_m)(x_m-x_{m-1})-(y_{m+1}-y_m)(y_m-y_{m-1})}\ \ 14.)$$

wobei die Zeichen des Zählers und Nenners in der ursprünglichen Form mit denen des Sinus und Cosinus übereinstimmen, folglich zur Bestimmung des Quadranten, in welchem der Winkel liegen muss, vollkommen hinreichen.

Nach denselben Formeln kann auch der Neigungswinkel zwischen zwei Diagonalen berechnet werden, man darf nur die Stellenzeiger der Ecken gehörig vertauschen. Z. B in dem Bei-

spiele des §. 8. soll der zwischen den Diagonalen 3,5 und 3,7 liegende Winkel bestimmt werden. Man findet

$$tg(7,3,5) = \frac{(x_5-x_3)(y_3-y_7)-(y_5-y_3)(x_3-x_7)}{-(x_5-x_3)(x_3-x_7)-(y_5-y_3)(y_3-y_7)} = \frac{5\cdot300}{513\cdot012}$$

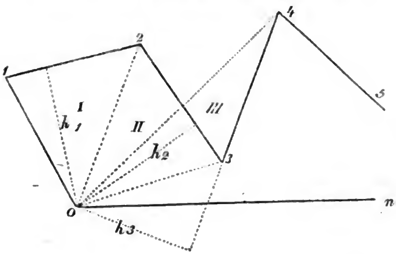
und

$$(5,3,7) = 7^0.\ 0'.\ 4''.$$

§. 17.

Aufgabe. Aus den Umfangsstücken eines Polygones den Flächeninhalt desselben zu bestimmen.

Auflösung. Man ziehe aus dem Coordinatenursprung an alle Eckpunkte Diagonalen, so zerfällt das Polygon in Dreiecke, deren Flächen wir der Reihe nach mit den römischen Ziffern I, II, III u. s. w. bezeichnen wollen. Diese Flächen sind positiv, oder negativ, je nachdem die Dreiecke durch Drehung der beweglichen Geraden von links nach rechts, oder umgekehrt entstanden sind (siehe §. 6).



Bezeichnet man nun die Perpendikel, welche man vom Punkte o an die Seiten des Polygons ziehen kann, mit h_1, h_2, h_3 ...., so ergeben sich für die Flächen der successiven Dreiecke die Ausdrücke

$$2.\ I. = (1,2).\ h_1$$
$$2.\ II. = (2,3).\ h_2$$
$$2.\ III. = (3,4).\ h_3$$

. . . . . .

. . . . . .

Aber h_1, h_2, h_3 .... sind nichts Anderes, als die Ordinaten des Punktes o, bezogen auf Coordinatensysteme, deren Ursprung die Punkte 1, 2, 3, ... und Axe der x die Linien 1,2, 2,3, 3,4, ... sind; demnach ist:

$h_1 = (0,1)Sin(1)$

$h_2 = (1,2)Sin(2) - (0,1)Sin[(2)+(1)]$

$h_3 = (2,3)Sin(3) - (1,2)Sin[(3)+(2)] + (0,1)Sin[(3)+(2)+(1)]$

. . . .

. . . .

und durch Substitution dieser Werthe in den obigen Ausdrücken ergeben sich:

$2. \quad I = (1,2)\,(0,1)\,\text{Sin}\,(1)$

$2. \quad II = (2,3)\,(1,2)\,\text{Sin}\,(2) - (2,3)\,(0,1)\,\text{Sin}\,[(2) + (1)]$

$2. \quad III = (3,4)\,(2,3)\,\text{Sin}\,(3) - (3,4)\,(1,2)\,\text{Sin}\,[(3) + (2)] + (3,4)$
$(0,1)\,\text{Sin}\,[(3) + (2) + (1)]$

. . . .

. . . .

Die algebraische Summe dieser Ausdrücke ist nun gleich dem doppelten Flächeninhalte des Polygones, wobei die positive, oder negative Eigenschaft der einzelnen Dreiecke schon berücksichtigt ist, indem die Formel 5.) die Grösse h stets mit demjenigen Zeichen liefert, welches ihr nach Beschaffenheit des Dreieckes zukommt; demnach ist die doppelte Fläche

$$\begin{aligned}2.\,F = {} & (0,1)\,(1,2)\,\text{Sin}\,(1) - (0,1)\,(2,3)\,\text{Sin}\,[(1) + (2)] + \ldots. \\ & \pm (0,1)\,(n-1,n)\,\text{Sin}\,[(1) + \ldots + (n-1)] \\ & + (1,2)\,(2,3)\,\text{Sin}\,(2) - (1,2)\,(3,4)\,\text{Sin}\,[(2) + (3)] + \ldots. \\ & \mp (1,2)\,(n-1,n)\,\text{Sin}\,[(2) + \ldots + (n-1)] \\ & + (2,3)\,(3,4)\,\text{Sin}\,(3) - (2,3)\,(4,5)\,\text{Sin}\,[(3) + (4)] + \ldots. \\ & \pm (2,3)\,(n-1,n)\,\text{Sin}\,[(3) + \ldots. + (n-1)]\end{aligned}$$

. . . .

. . . .

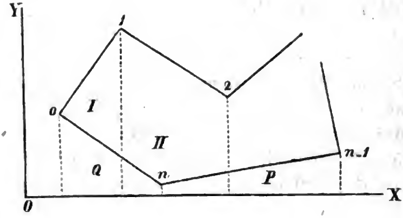
$$+ (n-2, n-1)\,(n-1, n)\,\text{Sin}\,(n-) \ldots.. \quad 15.)$$

oder mit Worten: Die doppelte Fläche des Polygones ist gleich der Summe der Producte aus je zwei Seiten mit Weglassung einer einzigen, multiplicirt mit dem Sinusse der Summe der eingeschlossenen Winkel, wobei das Zeichen $\mp$ gilt, je nachdem die Anzahl der summirten Winkel gerade oder ungerade ist. In dieser Formel kommen die Seite (0,n) und die anliegenden Winkel (0), (n) nicht vor, sie ist demnach auch noch dann anwendbar, wenn im Polygone eine Seite, und die anliegenden Winkel unbekannt sind. Nach dieser Formel kann auch ein Theil des Polygones berechnet werden, der mittelst einer Diagonale vom ganzen getrennt wurde; ebenso lässt sich auch der Flächeninhalt einer zwischen zwei Diagonalen eingeschlossenen Zone durch zweimalige Anwendung dieser Formel, und nachherige Subtraction erhalten.

§. 18.

Aufgabe. Aus orthogonalen Coordinaten den Flächeninhalt eines Polygones zu bestimmen.

Auflösung. Zieht man aus allen Eckpunkten des Polygones senkrechte Linien auf die Abscissenaxe, so zerfällt das Polygon in lauter Trapeze, deren Flächen wir der Reihe nach mit den römischen Ziffern I, II, III, ... bezeichnen wollen. Nun ist



$$2.\ I = (y_0 + y_1)(x_1 - x_0) = y_0 x_1 - y_0 x_0 + y_1 x_1 - y_1 x_0$$
$$2.\ II = (y_1 + y_2)(x_2 - x_1) = y_1 x_2 - y_1 x_1 + y_2 x_2 - y_2 x_1$$

. . . .

. . . .

$$2.\ P = (y_{n-1} + y_n)(x_n - x_{n-1}) = y_{n-1} x_n - y_{n-1} x_{n-1} + y_n x_n - y_n x_{n-1}$$
$$2.\ Q = (y_n + y_0)(x_0 - x_n) = y_n x_0 - y_n x_n + y_0 x_0 - y_0 x_n$$

addirt man diese Gleichungen, wobei die mit denselben Stellenzeigern behafteten Glieder sich wechselseitig aufheben, so erhält man den doppelten Flächeninhalt des Polygones, und es wird

$$\left.\begin{aligned} 2.\ F &= y_0(x_1 - x_n) + y_1(x_2 - x_0) + y_2(x_3 - x_1) + \dots \\ &\quad + y_n(x_0 - x_{n-1}) \\ 2.\ F &= x_0(y_1 - y_n) + x_1(y_2 - y_0) + x_2(y_3 - y_1) + \dots \\ &\quad + x_n(y_0 - y_{n-1}) \end{aligned}\right\} \dots 16.)$$

mit Worten: Die doppelte Fläche des Polygones ist gleich der Summe der Producte aus einer jeden Ordinate in die Differenz der nächst höheren und nächst niedrigeren Abscisse.

Hat man eine Polygonseite, etwa o n, zur Abscissenaxe, und den Eckpunkt o zum Coordinatenursprung genommen, dann wird $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $x_n = (0, n)$, $y_n = 0$, und die Gleichungen 16.) werden einfacher.

Vergleicht man die Formeln 15.) und 16.) mit einander, so sieht man, dass die letztere bedeutend kürzer ist, als die erstere; sie enthält bei einem n Eck n Glieder, während die erstere aus

$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Gliedern besteht. Demnach, wenn die Anzahl der Polygonseiten ziemlich gross ist, ist es zweckmässiger, aus den Umfangsstücken zuerst die Coordinaten der Eckpunkte, dann aus diesen den Flächeninhalt zu bestimmen, als unmittelbar nach der Formel 15.) zu rechnen.

§. 19.

Aufgabe. Aus einem gegebenen Polygone eine bestimmte Fläche f mittelst einer Transversale abzuschneiden, welche aus einem gegebenen Punkte des Umfanges ausgeht.

Auflösung. Man verlege den Coordinatenursprung in den Punkt, durch den die Theilungslinie geführt werden soll, denke sich an alle Eckpunkte Diagonalen gezogen, und berechne die Flächeninhalte der entstandenen Dreiecke nach den Formeln des §. 17.

$$2.\ (0,1,2) = (1,2)(0,1)\,\mathrm{Sin}(1)$$
$$2.\ (0,2,3) = (2,3)\big((1,2)\,\mathrm{Sin}(2) - (0,1)\,\mathrm{Sin}[(2)+(1)]\big)$$
$$2.\ (0,3,4) = (3,4)\big((2,3)\ \mathrm{Sin}\ (3) - (1,2)\ \mathrm{Sin}\ [(3)+(2)] + (0,1)\ \mathrm{Sin}\ [(3)+(2)+(1)]\big)$$

. . . .
. . . .

Gesetzt nun, die algebraische Summe der m—1 ersten Flächen ist noch kleiner als 2 f, aber die der m ersten Flächen grösser als 2 f, so wird die Theilungslinie irgend einen zwischen den Eckpunkten m und m+1 liegenden Punkt der Seite m, m+1 treffen; und wenn man den Abstand dieses Punktes vom Eckpunkte m mit z bezeichnet, wird

$$\begin{aligned} 2\,f = {} & (1,2)\,(0,1)\ \mathrm{Sin}\ (1) \\ & + (2,3)\ \big((1,2)\,\mathrm{Sin}\,(2) - (0,1)\ \mathrm{Sin}\ [(2)+(1)]\big) \\ & \quad \ldots\ldots\ldots \\ & + z\ \big((m-1,m)\ \mathrm{Sin}(m) - (m-2,m-1)\ \mathrm{Sin}[(m)+(m-1)] + \ldots \\ & \quad \pm (0,1)\,\mathrm{Sin}\,[(m)+\ldots+(1)]\big) \quad \ldots.\ 17.) \end{aligned}$$

Daraus kann z mit leichter Mühe gefunden werden.

Sollten von demselben Punkte noch mehrere Theilungslinien gezogen werden, durch welche die Fläche f′, f″, ... abgeschnitten werden, so verfahre man auf ganz ähnliche Weise, jedoch mit dem

Unterschiede. dass man in 17.) statt f ..... f + f', f + f' + f'' .... zu setzen hat, um sich von den ohnehin nicht bekannten Längen der Theilungslinie unabhängig zu machen.

Beispiel. In einem Polygone sind gegeben

(0) = 110°. 20'. 10''	(0, 1) = 327·35
(1) = 136. 8. 20	(1,2) = 382·70
(2) = 93. 55. 30.	(2,3) = 203·10
(3) = 205. 41. 40.	(3,4) = 419·75
. . . . .	. . . .
. . . . .	. . . .

man soll von o aus eine Fläche von 66756 □ abschneiden. Man findet, dass (0, 1, 2) zu wenig, aber (0, 1, 2, 3) schon zu viel ist; die obige Gleichung reducirt sich demnach nach allen möglichen Abürzungen auf

$$46706{\cdot}5 = 632{\cdot}801\, z;$$

daraus folgt:

$$z = 73{\cdot}809.$$

§. 20.

Aufgabe. Aus einem Polygone, dessen Endpunkte mittelst Coordinaten bestimmt sind, eine gegebene Fläche f abzuschneiden, wobei die Theilungslinie aus einem bestimmten Punkte des Umfanges ausgehen soll.

Auflösung. Man bezeichne den Eckpunkt, aus welchem die Theilungslinie ausgehen soll, der Einfachheit wegen mit dem Stellenzeiger 0, denke sich aus diesem Punkte die Diagonalen 0, 2, 0, 3 .... gezogen, und berechne die Flächeninhalte der abgeschnittenen Figuren nach §. 18, so ergeben sich:

$$2(0,1,2) = y_0(x_1 - x_2) + y_1(x_2 - x_0) + y_2(x_0 - x_1)$$
$$2(0,1,2,3) = y_0(x_1 - x_3) + y_1(x_2 - x_0) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_0 - x_2);$$

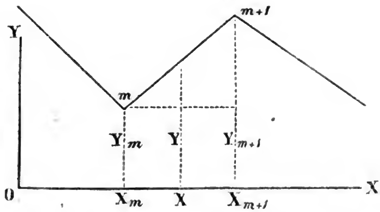
. . . .

. . . .

gesetzt nun $(0,1,2 \ldots m) < f < (0,1,2 \ldots m, m+1)$, so wird die Theilungslinie durch einen auf der Polygonseite m, m+1 liegenden Punkt gehen. Seien die Coordinaten dieses Punktes x, y; so ist

$$2f = y_0(x_1 - x) + y_1(x_2 - x_0) + y_2(x_3 - x_1) + \ldots + y(x_0 - x_m) \quad \ldots 18.)$$

ausserdem aber hat man noch aus der beiliegenden Figur wegen Aehnlichkeit der Dreiecke:



$$(y - y_m) : (x - x_m) = (y_{m+1} - y_m) : (x_{m+1} - x_m) \ldots\ldots 18'.)$$

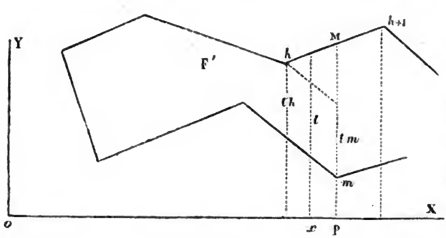
Aus diesen zwei Gleichungen lassen sich die unbekannten x, y zuverlässig bestimmen.

Sollen aus demselben Punkte mehrere Theilungslinien gezogen werden, welche die Flächen f', f'', f''', ... abschneiden, so verfahre man genau auf dieselbe Weise, mit dem Unterschiede, dass man in der Formel 18.) anstatt f nacheinander $f + f'$, $f + f' + f''$,... setzen muss, um sich von den etwaigen Unrichtigkeiten in der Bestimmung der vorhergehenden Theilungslinie unabhängig zu machen.

§. 21.

Aufgabe. Aus einem Polygone eine bestimmte Fläche f mittelst einer Geraden abzuschneiden, welche mit einer gegebenen Linie parallel ist.

Auflösung. Man berechne die Coordinaten aller Eckpunkte, bezogen auf ein Coordinatensystem, dessen Axe der x auf die gegebene Linie senkrecht steht; ordne die Abscissen nach ihrer Grösse, und berechne die Länge der Transversalen, welche durch sämmtliche Ecken des Polygons parallel mit der gegebenen Geraden gezogen werden können, auf folgende Weise: Es seien x_h, x_m, x_{h+1} drei aufeinanderfolgende Abscissen, so dass $x_h < x_m < x_{h+1}$. dann ist aus der beiliegenden Figur, wenn man die Transversalen mit t bezeichnet,



und zur Unterscheidung die Stellenzeiger der Ecken ansetzt

$$t_m = MP - mP.$$

Aber aus 18'.) folgt, dass

$$MP = \frac{y_{h+1}(x_m - x_h) + y_h(x_{h+1} - x_m)}{x_{h+1} - x_h}$$

$$mP = y_m$$

demnach

$$t_m = \frac{y_{h+1}(x_m - x_h) + y_h(x_{h+1} - x_m) + y_m(x_h - x_{h+1})}{x_{h+1} - x_h} \quad \ldots. \; 19.)$$

Aus den Transversalen, welche untereinander Trapeze bilden, rechnet man die Flächen dieser Figuren, und summirt sie fort, bis die Summe die abzuschneidende Fläche übertrifft. Es sei nun der Flächeninhalt der Figur bis zur Transversale $t_h = f'$, und der Unterschied

$$f - f' = u$$

kleiner als die Fläche des nächstfolgenden Trapezes, so wird die Theilungslinie zwischen den Eckpunkten h, und m durchgehen; bezeichnet man die Länge dieser unbekannten Transversale mit t, und die zugehörige Abscisse mit x, so ist

$$2u = (t_h + t)(x - x_h) \ldots. \; 20.)$$

ausserdem aber hat man noch wegen Aehnlichkeit der Dreiecke:

$$(t - t_h) : (t_m - t_h) = (x - x_h) : (x_m - x_h) \ldots. \; 20')$$

Aus diesen zwei Gleichungen lassen sich die Unbekannten t und x leicht bestimmen. Die Auflösung führt zu einer Gleichung des zweiten Grades, und von den gefundenen Werthen muss derjenige genommen werden, welcher positiv ist, und zwischen den bekannten Grenzen t_h und t_m liegt.

Zweiter Abschnitt.

§. 22.

In den praktischen Wissenschaften ist es nicht hinreichend, eine allgemeine Auflösung irgend einer Aufgabe zu geben; sondern man muss trachten, sich von dem Grade der Genauigkeit ein Urtheil zu verschaffen; namentlich muss man den Einfluss kennen lernen, den ein Fehler in irgend einem Bestimmungsstücke auf das Resultat ausübt, damit man auf die Messung der hacklicheren eine grössere Sorgfalt verwenden könne. Da die zu befürchtenden Fehler immer klein sind, indem wir sie nicht aus Versehen, sondern lediglich aus der Ursache entstanden voraussetzen, dass sie sich ihrer Kleinheit wegen der Aufmerksamkeit, vielleicht auch den Messungshülfsmitteln des Geometers entziehen: so können wir uns bei dieser Untersuchung der Differentialrechnung bedienen, und alle Entwickelungen nur bis zu den Gliedern der zweiten Ordnung ausdehnen. Gehen wir nun die wichtigsten Formeln des ersten Abschnittes der Reihe nach durch.

§. 23.

Aus der Gleichung 2.) folgt durch Differentiation:

$$dW = - dA \ldots\ldots 21.)$$

d. h. ein Fehler in der Messung irgend eines Polygonwinkels geht in den unbekannten Winkel in derselben Grösse, aber mit entgegengesetztem Zeichen über. Setzt man alle Winkel eines n Eckes im Mittel um dw fehlerhaft voraus, welche Grösse ebensowohl positiv als negativ sein kann, dann wird der mittlere Fehler in W, nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung, durch die Formel bestimmt

$$dW = dw \sqrt{n-1} \ldots\ldots 21'.)$$

§. 24.

Aus den Gleichungen 5.) folgt, wenn man irgend eine Seite allein [etwa (h—1, h)] fehlerhaft annimmt:

$$\left.\begin{aligned} d\,y_m &= (-1)^{h-1} \operatorname{Sin}\,[(0)+(1)+\ldots+(h-1)]\; d\,(h-1, h) \\ d\,x_m &= (-1)^{h-1} \operatorname{Cos}\,[(0)+(1)+\ldots+(h-1)]\; d\,(h-1, h) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 22.)$$

Bezeichnet man den Winkel, welchen die fehlerhafte Seite (h—1, h) mit der positiven Halbaxe der x einschliesst, mit α, so ist nach 3.)

$$(-1)^{h-1}\,\mathrm{Sin}\,[(0)+(1)+\ldots+(h-1)] = \mathrm{Sin}\,\alpha$$
$$(-1)^{h-1}\,\mathrm{Sin}\,[(0)+(1)+\ldots+(h-1)] = \mathrm{Cos}\,\alpha;$$

demnach auch

$$\left.\begin{aligned} d\,y_m &= d\,(h-1)\,\mathrm{Sin}\,\alpha \\ d\,x_m &= d\,(h-1)\,\mathrm{Cos}\,\alpha \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 22'.)$$

Diese Ausdrücke sagen, dass die Coordinatenfehler eines Punktes m nichts Anderes sind, als die Projectionen des Seitenfehlers auf die respectiven Coordinatenaxen. Sie gelten, und bleiben sich gleich für alle Werthe von $m \geqq h$, hingegen für $m < h$ sind sie $= 0$; weil in diesem Falle $d(h-1, h) = 0$ ist. Es folgt hieraus, dass ein Fehler in irgend einer Seite allen darauf folgenden Punkten des Polygones eine mit der fehlerhaften Seite parallele Verschiebung ertheilt, während die vorangehenden Punkte ungeändert bleiben.

Wenn man nur einen Winkel allein, etwa (h) fehlerhaft voraussetzt, so erhält man:

$$\begin{aligned} d\,y_m = \Big[&(-1)^h (h, h+1)\,\mathrm{Cos}\,[(0)+(1)+\ldots+(h)] + (-1)^{h+1}(h+1, \\ &h+2)\,\mathrm{Cos}[(0)+(1)+\ldots+(h+1)] + \ldots + (-1)^{m-1}(m-1, m) \\ &\mathrm{Cos}\,[(0)+(1)+\ldots+(m-1)]\Big]\,d\,(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\,x_m = -\Big[&(-1)^h (h, h+1)\,\mathrm{Sin}\,[(0)+(1)+\ldots+(h)] + (-1)^{h+1}(h+1, \\ &h+2)\,\mathrm{Sin}\,[(0)+(1)+\ldots+(h+1)] + \ldots + (-1)^{m-1}(m-1, m) \\ &\mathrm{Sin}\,[(0)+(1)+\ldots+(m-1)]\Big]\,d\,(h); \end{aligned}$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichungen 5.)

$$\left.\begin{aligned} d\,y_m &= (x_m - x_h)\,d\,(h) \\ d\,x_m &= -(y_m - y_h)\,d\,(h) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 23.)$$

Diese Formeln sagen aus, dass die Fehler in den Coordinaten des Punktes m den Projectionen der Diagonale h m auf die gegenseitigen Coordinatenaxen proportional sind.

Quadrirt und addirt man diese Gleichungen, und zieht die Quadratwurzel aus, so wird

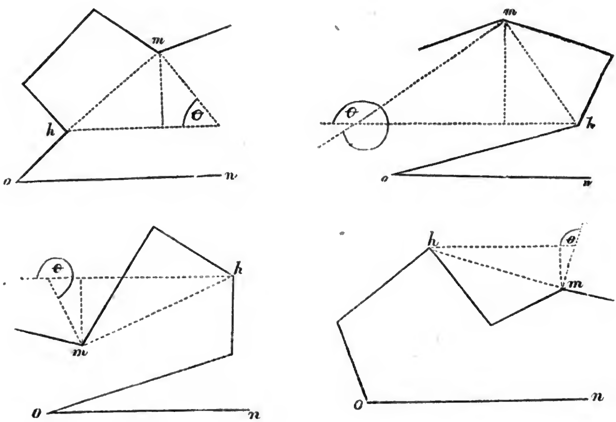
$$\sqrt{d\,x_m^2 + d\,y_m^2} = \sqrt{(x_m - x_h)^2 + (y_m - y_h)^2}\;d\,(h).$$

Nun bedeutet $\sqrt{d\,x_m^2 + d\,y_m^2} = d\sigma$ die Verrückung des Punktes m,

ferner ist $\sqrt{(x_m - x_h)^2 + (y_m - y_h)^2}$ = der Diagonale (h, m); folglich ist die Verrückung des Punktes m, oder

$$d\sigma = (h,m)\ d\ (h);$$

d. h. die Verrückung geht in einem Kreisbogen vor sich, dessen Radius der Diagonale zwischen dem fehlerhaften und gesuchten Punkte gleich ist. Berücksichtigt man diese Beziehungen, und bezeichnet den Winkel,



welchen der positive Theil einer Senkrechten auf die Diagonale h m mit der negativen Halbaxe der x einschliesst, mit Θ, so wird allgemein

$$x_m - x_h = (h, m)\ \mathrm{Sin}\ \Theta$$
$$y_m - y_h = (h, m)\ \mathrm{Cos}\ \Theta;$$

folglich durch Substitution dieser Werthe in der Gleichung 23.) entsteht

$$\left.\begin{array}{l} d\,y_m = (h, m)\ \mathrm{Sin}(\Theta)\, d\,(h) = d\,\sigma\ \mathrm{Sin}(\Theta) \\ d\,x_m = -(h, m)\ \mathrm{Cos}(\Theta)\, d\,(h) = -d\sigma\ \mathrm{Cos}(\Theta) \end{array}\right\} \ldots .\ 23'.)$$

d. h. die Fehler in den Coordinaten des Punktes m sind nichts Anderes, als die Projectionen der Verrückung desselben auf die respectiven Coordinatenaxen.

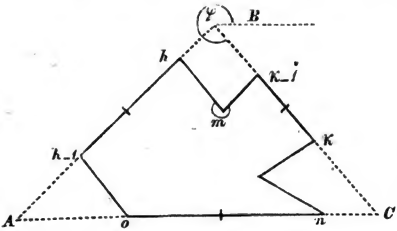
§. 25.

Wenn in einem Polygone zwei Seiten und 1 Winkel [etwa (k—1, k), (n, o) und (m)] unbekannt, und eine Seite [(h—1, h)] fehlerhaft sind, so gelangt man zu den Fehlern der unbekannten Seiten auf folgende Weise: Man differenzirt die Gleichungen 7.) nach allen Veränderlichen, man erhält dann:

$$(-1)^{h-1} \operatorname{Sin}[(0)+(1)+\dots+(h-1)]\, d\,(h-1,h)+(-1)^{k-1} \operatorname{Sin}[(0)+(1)+\dots+(k-1)]\, d\,(k-1,k)=0$$

$$(-1)^{h-1} \operatorname{Cos}[(0)+(1)+\dots+(h-1)]\, d\,(h-1,h)+(-1)^{k-1} \operatorname{Cos}[(0)+(1)+\dots+(k-1)\, d\,(k-1,k)=d\,(n,o)$$

Diese Gleichungen lassen sich geometrisch durch ein Dreieck darstellen, dessen Seiten mit den fehlerhaften Seiten des Polygones parallel laufen; denn verlängert man die fehlerhaften Seiten, bis sie sich in A, B, C durchschneiden, und bezeichnet Seiten und Winkel des Dreieckes mit a, b, c, und A, B, C, so hat man die Fundamental-Relationen



$$c \operatorname{Sin} A - a \operatorname{Sin} C = 0$$
$$c \operatorname{Cos} A + a \operatorname{Cos} C = b.$$

Nun ist laut Gleichung 3.) allgemein

$$(-1)^{h-1} \operatorname{Sin}[(0)+(1)+\dots+(h-1)] = \operatorname{Sin} A$$
$$(-1)^{h-1} \operatorname{Cos}[(0)+(1)+\dots+(h-1)] = \operatorname{Cos} A;$$

ferner wegen

$$360 - \varphi = C$$

ist

$$(-1)^{k-1} \operatorname{Sin}[(0)+(1)+\dots+(k-1)] = \operatorname{Sin}\varphi = -\operatorname{Sin} C$$
$$(-1)^{k-1} \operatorname{Cos}[(0)+(1)+\dots+(k-1)] = \operatorname{Cos}\varphi = \operatorname{Cos} C.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die obigen Gleichungen entstehen

$$d(h-1,h) \operatorname{Sin} A - d\,(k-1,k) \operatorname{Sin} C = 0$$
$$d\,(h-1h) \operatorname{Cos} A + d\,(k-1,k) \operatorname{Cos} C = d\,(n,0)$$

Vergleicht man diese Systeme von Gleichungen miteinander, so erkennt man sogleich, dass sie identisch sind, wenn

$$a:b:c = d\,(k-1,k) : d\,(o,n) : d\,(h-1,h)$$

d. h. die 3 Seiten dieses Dreieckes stehen zu einander genau in dem Verhältnisse, wie die respectiven Seitenfehler des Polygons.

Löset man die Gleichungen nach $d(k-1,k)$ und $d(o,n)$ auf, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} d(k-1,k) &= (-1)^{h-k-1}\frac{\operatorname{Sin}[(0)+(1)+\ldots+(h-1)]}{\operatorname{Sin}[(0)+(1)+\ldots+(k-1)]}d(h-1,h) \\ d(0,n) &= (-1)^{h-1}\frac{\operatorname{Sin}[(h)+(h+1)+\ldots+(k-1)]}{\operatorname{Sin}[(0)+(1)+\ldots+(k-1)]}d(h-1,h) \\ &= (-1)^{h-1}\frac{\operatorname{Sin}[(k)+(k+1)+\ldots+(h-1)]}{\operatorname{Sin}[(0)+(1)+\ldots+(k-1)}d(h-1,h) \end{aligned}\right\}\ldots 24.)$$

je nachdem $h \lessgtr k$.

Wenn in demselben Polygone ein Winkel allein [etwa (h)] fehlerhaft ist, so entstehen durch Differentiation nach allen Veränderlichen

$$\Big[(-1)^h(h,h+1)\operatorname{Cos}[(0)+(1)+\ldots+(h)]+\ldots+(-1)^m(m,m+1)\operatorname{Cos}[(0)+(1)+\ldots+(m)]+\ldots\Big]d(h)$$
$$+\Big[(-1)^m(m,m+1)\operatorname{Cos}[(0)+(1)+\ldots+(m)]+\ldots\Big]d(m)+(-1)^{k-1}\operatorname{Sin}[(0)+(1)+\ldots+(k+1)]\,d(k-1,k)=0$$
$$-\Big[(-1)^h(h,h+1)\operatorname{Sin}[(0)+(1)+\ldots+(h)]+\ldots+(-1)^m(m,m+1)\operatorname{Sin}[(0)+(1)+\ldots+(m)]+\ldots\Big]d(h)$$
$$-\Big[(-1)^m(m,m+1)\operatorname{Sin}[(0)+(1)+\ldots+(m)]+\ldots\Big]d(m)+(-1)^{k-1}\operatorname{Cos}[(0)+(1)+\ldots+(k+1)]\,d(k-1,k)=d(n,0)$$

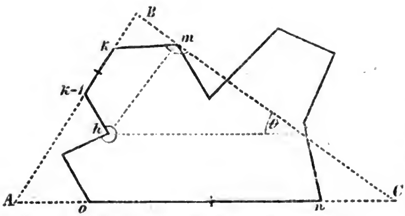
Es ist aber nach 13.) $d(m)=-d(h)$, demnach reduciren sich die Ausdrücke auf

$$\Big[(-1)^h(h,h+1)\operatorname{Cos}[(0)+\ldots+(h)]+\ldots+(-1)^{m-1}(m-1,m)\operatorname{Cos}[(0)+\ldots+(m-1)]\Big]d(h)+(-1)^{k-1}\operatorname{Sin}[(0)+\ldots+(k-1)]d(k-1,k)=0$$
$$-\Big[(-1)^h(h,h+1)\operatorname{Sin}[(0)+\ldots+(h)]+\ldots+(-1)^{m-1}(m-1,m)\operatorname{Sin}[(0]+\ldots+(m-1)]\Big]d(h)+(-1)^{k-1}\operatorname{Cos}[(0)+\ldots+(k-1)]d(k-1,k)=d(0,n)$$

oder endlich mit Rücksicht auf die Formeln 5.)

$$(x_m-x_h)\,d(h)+(-1)^{k-1}\operatorname{Sin}[(0)+(1)+\ldots+(k-1)]d(k-1,k)=0$$
$$-(y_m-y_h)d(h)+(-1)^{k-1}\operatorname{Cos}[(0)+(1)+\ldots+(k-1)]\,d(k-1,k)=d(0,n)$$

Die geometrische Construction dieser Ausdrücke gibt ein Dreieck, dessen 2 Seiten mit den zwei fehlerhaften Seiten des Polygones parallel laufen, die dritte aber auf die zwischen den fehlerhaften Winkel-Ecken gezogene Diagonale senkrecht steht.



Verlängert man nämlich die zwei fehlerhaften Seiten, und zieht auf die Diagonale h m eine Senkrechte, welche mit der negativen Halbaxe der x den Winkel Θ einschliesst, und bezeichnet Seiten und Winkel mit a, b, c, A, B, C, so hat man allgemein

$$a \operatorname{Sin} C - c \operatorname{Sin} A = 0$$
$$a \operatorname{Cos} C + c \operatorname{Cos} A = b.$$

Aber vermöge der Gleichung 3.) ist

$$(-1)^{k-1} \operatorname{Sin}[(0)+(1)+\ldots+(k-1)] = \operatorname{Sin} A$$
$$(-1)^{k-1} \operatorname{Cos}[(0)+(1)+\ldots+(k-1)] = \operatorname{Cos} A;$$

folglich mit Berücksichtigung der Gleichungen 23.) 23'.), und anstatt $\Theta = C$ gesetzt, erhält man

$$+ d\sigma \operatorname{Sin} C + d(k-1,k) \operatorname{Sin} A = 0$$
$$- d\sigma \operatorname{Cos} C + d(k-1,k) \operatorname{Cos} A = d(0,n).$$

Durch Vergleichung dieser zwei Systeme ergibt sich dann, dass sie identisch werden, wenn

$$a:b:c = d\sigma : -d(0,n) : -d(k-1,k),$$

d. h. die 3 Seiten des erwähnten Dreieckes drücken das Verhältniss unter den Seitenfehlern, und der Verrückung des Punktes m durch den Winkelfehler in h vollständig aus.

Löset man die obigen Gleichungen auf, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} d(k-1,k) &= -\frac{x_m - x_h}{(-1)^{k-1} \operatorname{Sin}[(0)+(1)+\ldots+(k-1)]}\, d(h) \\ d(0,n) &= -\frac{(y_m-y_h)\operatorname{Sin}[(0)+\ldots+(k-1)]+(x_m-x_h)\operatorname{Cos}[(0)+\ldots+(k-1)]}{\operatorname{Sin}[(0)+(1)+\ldots+(k-1)]}\, d(h) \end{aligned}\right\} \quad 25.)$$

§. 26.

Es seien in einem Polygone eine Seite und 2 Winkel [etwa (n,o), (k) und (m)] unbekannt, und eine Seite [(h—1, h)] fehlerhaft, so erhält man durch Differentiation aus den Fundamental-Gleichungen 7.) und 2.)

$(-1)^{h-1}$ Sin$[(0)+..+(h-1)]$ d$(h-1, h)+\left[(-1)^k (k,k+1)\right.$ Cos $[(0)$
$\left.+..+(k)]+...\right]$ d$(k)+\left[(-1)^m(m,m+1)\right.$ Cos$\left.[(0)+...+(m)]+...\right]$
d$(m)=0$

$(-1)^{h-1}$ Cos$[(0)+..+(h-1)]$ d$(h-1,h)-\left[(-1)^k (k,k+1)\right.$ Sin $[(0)$
$\left.+..+(k)]+...\right]$ d$(k)-\left[(-1)^m(m,m+1)\right.$ Sin $\left.[(0)+...+(m)]+...\right]$
d$(m)=$ d(o, n),

d$(k)+$ d$(m)=0$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen d(m), so erhält man:

$(-1)^{h-1}$Sin$[(0)+(1)+...+(h-1)]$ d$(h-1,h)+\left[(-1)^k (k,k+1)\right.Cos[(0)$
$+(1)+...+(k)]+...+(-1)^{m-1}(m-1,m)$ Sin$\left.[(0)+(1)+...+(m-1)]\right]$
d$(k)=0$

$(-1)^{h-1}$ Cos$[(0)+(1)+...+(h-1)]$d$(h-1,h)-\left[(-1)^k (k,k+1)\right.Sin[(0)$
$+(1)+...+(k)]+...+(-1)^{m-1}(m-1,m)Sin\left.[(0)+(1)+...+(m-1)]\right]$
d$(k)=$ d(n, o),

oder mit Berücksichtigung der Gleichungen 5.)

$(-1)^{h-1}$ Sin$[(0)+(1)+...+(h-1)]$ d$(h-1,h)+(x_m-x_k)$ d$(k)=0$

$(-1)^{h-1}$Cos$[(0)+(1)+...+(h-1)]$ d$(h-1,h)-(y_m-y_k)$ d$(k)=$d(n,o)

Durch eine der im vorigen §. gegebenen ähnliche Beweisführung ersieht man leicht, dass diese Gleichungen durch ein Dreieck dargestellt werden können, dessen zwei Seiten mit den zwei fehlerhaften Seiten des Polygones parallel laufen, die dritte aber auf die Diagonale, welche die Scheitel der 2 fehlerhaften Winkel verbindet, senkrecht steht; so dass die drei Seiten des Dreieckes diesen 3 respectiven Fehlern proportional sind. Aus den obigen Gleichungen folgt durch Auflösung:

$$\left.\begin{aligned} d(k) &= -\frac{(-1)^{h-1}\,\text{Sin}[(0)+(1)+...+(h-1)]\,d(h-1,h)}{x_m - x_k} = -d(m) \\ d(n,o) &= (-1)^{h-1}\frac{\left[\begin{aligned}&(x_m-x_k)\ \text{Cos}\ [(0)+...+(h-1)]\\ &+(y_m-y_k)\text{Sin}[(0)+...+(h-1)]\end{aligned}\right]}{x_m - x_k}\ d(h-1,h)\end{aligned}\right\}\ 26.)$$

Es sei in demselben Polygone ein Winkel (h) allein fehlerhaft, dann erhält man aus den Gleichungen 7.) durch Differentiation nach allen Veränderlichen

$\left[(-1^h(h,h+1)\right.Cos\left.[(0)+(1)+...+(h)]+...\right]$ d$(h)+\left[(-1)^k (k, k-1)\right.$
Cos$\left.[(0)+...+(k)]+...\right]d(k)+\left[(-1)^m(m, m+1)\right.$ Cos$[(0)+...+(m)]$
$\left.+\,...\right]$ d$(m)=0$

$-\left[(-1)^h(h,h+1)\right.Sin\left.[(0)+(1)+...+(h)]+...\right]$ d$(h)-\left[(-1)^k (k, k-1)\right.$
Sin $\left.[(0)+...+(k)]+...\right]d(k)-\left[(-1)^m (m, m+1)\right.$ Sin $[(0)+...+(m)]$
$\left.+\,...\right]$ d$(m)=$ d(n,o)

$$d(h)+d(k)+d(m)=0$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Elimination von d(m)

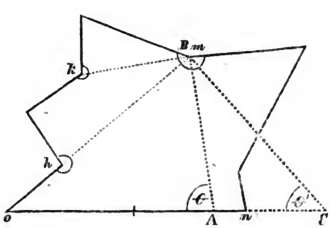
$$\Big[(-1)^h(h,h+1)\,\mathrm{Cos}[(0)+(1)+\ldots+(h)]+\ldots+(-1)^{m-1}(m,m-1)$$
$$\mathrm{Cos}[(0)+(1)+\ldots+(m-1)]\Big]\,d(h)$$
$$+\Big[(-1)^k(k,k+1)\,\mathrm{Cos}[(0)+(1)+\ldots+(k)]+\ldots+(-1)^{m-1}(m-1,m)$$
$$\mathrm{Cos}[(0)+(1)+\ldots+(m-1)]\Big]\,d(k)=0$$
$$-\Big[(-1)^h(h,h+1)\,\mathrm{Sin}[(0)+(1)+\ldots+(h)]+\ldots+(-1)^{m-1}(m-1,m)$$
$$\mathrm{Sin}[(0)+(1)+\ldots+(m-1)]\Big]\,d(h)$$
$$-\Big[(-1)^k(k,k+1)\,\mathrm{Sin}[(0)+(1)+\ldots+(k)]+\ldots+(-1)^{m-1}(m-1,m)$$
$$\mathrm{Sin}[(0)+(1)+\ldots+(m-1)]\Big]\,d(k)=d(n,o),$$

oder mit Rücksicht auf 5.)

$$(x_m-x_h)\,d(h)+(x_m-x_k)\,d(k)=0$$
$$-(y_m-y_h)\,d(h)-(y_m-y_k)\,d(k)=d(n,o).$$

Zieht man die Diagonalen hm und km, und errichtet aus dem Punkte m Senkrechte auf diese, bis sie die Seite on schneiden, so entsteht ein Dreieck, dessen Seiten den Verrückungen des Punktes m nur durch die Einwirkung der Winkelfehler in h und k allein, und dem Fehler in (n,o) proportional sind; denn die obigen Gleichungen lassen sich mittelst der Gleichungen 23.) und 23'.) so darstellen:

$$d\sigma\,\mathrm{Sin}\,\Theta+d\sigma'\,\mathrm{Sin}\,\Theta'=0$$
$$-d\sigma\,\mathrm{Cos}\,\Theta-d\sigma'\,\mathrm{Cos}\,\Theta'=d(n,o),$$



wo $d\sigma$ und $d\sigma'$ die Verrückungen des Punktes m, Θ und Θ' aber die Winkel bedeuten, welche die Senkrechten auf die Diagonalen km, und hm mit der negativen Halbaxe der x einschliessen; aus dem Dreiecke A B C aber hat man

$$c\,\mathrm{Sin}\,A-a\,\mathrm{Sin}\,C=0$$
$$c\,\mathrm{Cos}\,A+a\,\mathrm{Cos}\,C=b$$

oder

$$c\,\mathrm{Sin}\,\Theta-a\,\mathrm{Sin}\,\Theta'=0$$
$$-c\,\mathrm{Cos}\,\Theta+a\,\mathrm{Cos}\,\Theta'=b.$$

Durch Vergleichung dieser zwei Systeme von Gleichungen

ergibt sich dann, dass, wenn sie identisch werden sollen, die Proportion bestehen muss

$$a : b : c = -d\sigma' : d(n,o) : d\sigma,$$

wodurch der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Auf ähnliche Weise erhält man durch Elimination von d(k) die analogen Ausdrücke:

$$(x_k - x_h)\,d(h) + (x_k - x_m)\,d(m) = 0$$
$$-(y_k - y_h)\,d(h) - (y_k - y_m)\,d(m) = d(n,o)$$

hieraus folgen durch Auflösung

$$\left.\begin{aligned} d(k) &= -\frac{x_m - x_h}{x_m - x_k}\,d(h) \\ d(m) &= \frac{x_k - x_h}{x_m - x_k}\,d(h) \\ d(n,o) &= \left[-(y_m - y_h) + \frac{(y_m - y_k)\,(x_m - x_h)}{x_m - x_k}\right] d(h) \\ &= \left[-(y_k - y_h) + \frac{(y_m - y_k)\,(x_k - x_h)}{x_m - x_k}\right] d(h) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\, 27.)$$

§. 27.

Nimmt man in den Formeln des vorigen §. $k = o$ und $m = n$, d. h. die unbekannten Winkel an der unbekannten Seite liegend an, dann entstehen aus denselben folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} (n,o)d(o) &= -(-1)^{h-1}\mathrm{Sin}[(0)+(1)+\ldots+(h-1)]d(h-1,h) \\ &= -(n,o)\,d(n) \\ d(n,o) &= (-1)^{h-1}\mathrm{Cos}[(0)+(1)+\ldots+(h-1)]d(h-1,h) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\, 26'.)$$

und das Dreieck, dessen Seiten das Fehler-Verhältniss darstellen, wird rechtwinklich. Ferner

$$\left.\begin{aligned} (n,o)\,d(o) &= -[(n,o) - x_h]\,d(h) \\ (n,o)\,d(n) &= -x_h\,d(h) \\ d(n,o) &= y_h\,d(h) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\, 27'.)$$

wo das das Verhältniss der Fehler versinnlichende Dreieck ebenfalls rechtwinklich ist.

§. 28.

Wenn in einem Polygone 3 Winkel [etwa (k), (l), (m)] unbekannt, und eine Seite (h—1, h) fehlerhaft sind, erhält man aus den Fundamental-Gleichungen 2.) und 7.) durch Differentiation nach allen Veränderlichen:

$$(-1)^{h-1}\,\mathrm{Sin}\,[(0)+(1)+\ldots+(h-1)]\,d\,(h-1,h)+\Big[(-1)^{k}\,(k,k+1)\\ \mathrm{Cos}\,[(0)+(1)+\ldots+(k)]+\ldots\Big]\,d\,(k)\\ +\Big[(-1)^{l}\,(l,l+1)\,\mathrm{Cos}[(0)+(1)+\ldots+(l)]+\ldots\Big]\,d\,(l)+\Big[(-1)^{m}(m,m+1)\\ \mathrm{Cos}\,[(0)+(1)+\ldots+(m)]+\ldots\Big]\,d\,(m)=0$$

$$(-1)^{h-1}\,\mathrm{Cos}\,[(0)+(1)+\ldots+(h-1)]\,d\,(h-1,h)-\Big[(-1)^{k}\,(k,k+1)\\ \mathrm{Sin}\,[(0)+(1)+\ldots+(k)]+\ldots\Big]\,d\,(k)\\ -\Big[(-1)^{l}\,(l,l+1)\,\mathrm{Sin}[(0)+(1)+\ldots+(l)]+\ldots\Big]\,d\,(l)-\Big[(-1)^{m}(m,m+1)\\ \mathrm{Sin}\,[(0)+(1)+\ldots+(m)+\ldots\Big]\,d\,(m)=0$$

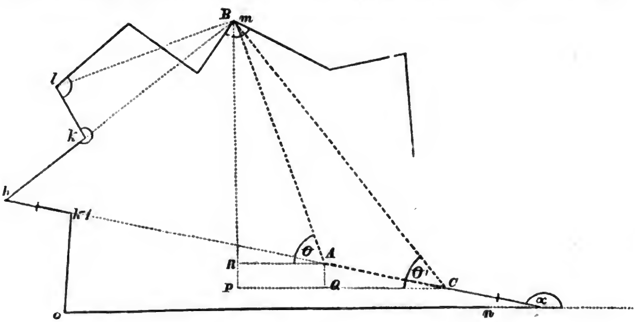
$$d\,(k)+d\,(l)+d\,(m)=0.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen einen der Fehler, etwa d(m), und berücksichtigt die Formeln 5.), so entstehen

$$(-1)^{h-1}\mathrm{Sin}[(0)+(1)+\ldots+(h-1)]d(h-1,h)+(x_m-x_k)d(k)+(x_m-x_l)\\ d\,(l)=0$$

$$(-1)^{h-1}\mathrm{Cos}[(0)+(1)+\ldots+(h-1)]d(h-1,h)-(y_m-y_k)d(k)-(y_m-y_l)\\ d\,(l)=0$$

Diese Gleichungen lassen sich geometrisch durch ein Dreieck darstellen, dessen 2 Seiten auf die Diagonalen km und lm senkrecht stehen, die dritte aber mit der fehlerhaften Seite parallel ist;



denn construirt man dieses Dreieck, und bezeichnet die Seiten desselben mit a, b, c, den Winkel zwischen der Seite (h—1,h) und der positiven Halbaxe der x mit α, sowie auch die Winkel, welche die Senkrechten auf die erwähnten Diagonalen mit der negativen Halbaxe der x einschliessen, mit Θ und Θ', und die Verrückungen des Punktes m mit $d\sigma$ und $d\sigma'$, so lassen sich die obigen Gleichungen auch so schreiben:

$$d(h-1,h)\,\mathrm{Sin}\,\alpha + d\sigma'\,\mathrm{Sin}\,\Theta' + d\sigma\,\mathrm{Sin}\,\Theta = 0$$
$$d(h-1,h)\,\mathrm{Cos}\,\alpha - d\sigma'\,\mathrm{Cos}\,\Theta' - d\sigma\,\mathrm{Cos}\,\Theta = 0$$

Aus der Figur aber hat man

$$PR + RB = PB,$$
$$PQ + CQ = PC,$$

oder

$$b\,\mathrm{Sin}\,\alpha + c\,\mathrm{Sin}\,\Theta - a\,\mathrm{Sin}\,\Theta' = 0$$
$$b\,\mathrm{Cos}\,\alpha - c\,\mathrm{Cos}\,\Theta + a\,\mathrm{Cos}\,\Theta' = 0.$$

Durch Vergleichung dieser 2 Systeme sieht man leicht, dass sie identisch werden, wenn

$$a : b : c = - d\sigma' : d(h-1,h) : d\sigma$$

folglich die Seiten dieses Dreieckes sind den respectiven Verrückungen des Punktes m durch die Fehler in k und l, und dem Seitenfehler proportional.

Aus den obigen Gleichungen erhält man durch Auflösung:

$$\left.\begin{aligned}
d(k) &= -(-1)^{h-1}\frac{\begin{bmatrix}(y_m-y_l)\,\mathrm{Sin}[(0)+\ldots+(h-1)]\\ +(x_m-x_l)\,\mathrm{Cos}[(0)+\ldots+(h-1)]\end{bmatrix}}{(y_m-y_l)(x_m-x_k)-(x_m-x_l)(y_m-y_k)}d(h-1,h)\\
d(l) &= (-1)^{h-1}\frac{\begin{bmatrix}(y_m-y_k)\,\mathrm{Sin}[(0)+\ldots+(h-1)]\\ +(x_m-x_k)\,\mathrm{Cos}[(0)+\ldots+(h-1)]\end{bmatrix}}{(y_m-y_l)(x_m-x_k)-(x_m-x_l)(y_m-y_k)}d(h-1,h)\\
d(m) &= -(-1)^{h-1}\frac{\begin{bmatrix}(y_l-y_k)\,\mathrm{Sin}[(0)+\ldots+(h-1)]\\ +(x_l-x_k)\,\mathrm{Cos}[(0)+\ldots+(h-1)]\end{bmatrix}}{(y_m-y_l)(x_m-x_k)-(x_m-x_l)(y_m-y_k)}d(h-1,h)
\end{aligned}\right\} 28.)$$

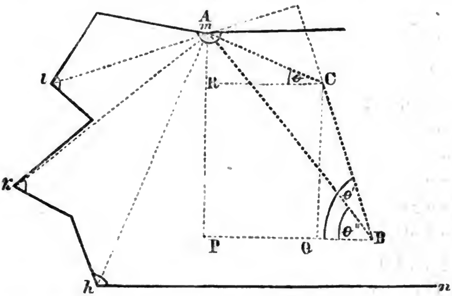
Setzt man in demselben Polygone einen Winkel (h) fehlerhaft voraus, so erhält man aus den Fundamental-Gleichungen durch Differentiation nach allen Veränderlichen:

$$\left[(-1)^h(h,h+1)\mathrm{Cos}[(0)+\ldots+(h)]+\ldots\right]d(h) + \left[(-1)^k(k,k+1)\mathrm{Cos}[(0) +\ldots+(k)]+\ldots\right]d(k)$$
$$\left[+(-1)^l(l,l+1)\,\mathrm{Cos}[(0)+\ldots+(l)]+\ldots\right]d(l) + \left[(-1)^m(m,m+1) \mathrm{Cos}[(0)+\ldots+(m)]+\ldots\right]d(m) = 0$$
$$\left[(-1)^h(h,h+1)\,\mathrm{Sin}[(0)+\ldots+(h)]+\ldots\right]d(h) + \left[(-1)^k(k,k+1)\mathrm{Sin}[(0) +\ldots+(k)]+\ldots\right]d(k)$$
$$\left[+(-1)^l(l,l+1)\,\mathrm{Sin}[(0)+\ldots+(l)]+\ldots\right]d(l) + \left[(-1)^m(m,m+1) \mathrm{Sin}[(0)+\ldots+(m)]+\ldots\right]d(m) = 0$$
$$d(h) + d(k) + d(m) = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgen durch Elimination von d(m) und Berücksichtigung der Gleichungen 5.)

$$(x_m - x_h)d(h) + (x_m - x_k)d(k) + (x_m - x_l)d(l) = 0$$
$$(y_m - y_h)d(h) + (y_m - y_k)d(k) + (y_m - y_l)d(l) = 0$$

Diese Gleichungen werden geometrisch durch ein Dreieck dargestellt, dessen Seiten auf die Diagonalen hm, km, lm senkrecht stehen



denn bezeichnet man die Seiten dieses Dreieckes mit a, b, c, und die Winkel, welche diese mit der negativen Halbaxe der x einschliessen, mit Θ, Θ', Θ'', sowie die Verrückungen des Punktes m durch die Fehler in h, l, k mit $d\sigma$, $d\sigma'$, $d\sigma''$, so lassen sich die obigen Gleichungen auch so ausdrücken:

$$d\sigma \operatorname{Sin} \Theta + d\sigma' \operatorname{Sin} \Theta' + d\sigma'' \operatorname{Sin} \Theta'' = 0$$
$$d\sigma \operatorname{Cos} \Theta + d\sigma' \operatorname{Cos} \Theta' + d\sigma'' \operatorname{Cos} \Theta'' = 0$$

Aus der Figur aber hat man

$$PR + RA = PA$$
$$PQ + QB = PB$$

oder

$$b \operatorname{Sin} \Theta + a \operatorname{Sin} \Theta' - c \operatorname{Sin} \Theta'' = 0$$
$$b \operatorname{Cos} \Theta + a \operatorname{Cos} \Theta' - c \operatorname{Cos} \Theta'' = 0$$

Diese 2 Gleichungen werden identisch, wenn die Proportion besteht

$$b : a : c = d\sigma : d\sigma' : - d\sigma''$$

d. h. die Seiten des Dreieckes haben zueinander dasselbe Verhältniss, wie die correspondirenden Verrückungen des Punktes m durch die Winkelfehler.

Durch Auflösung dieser Gleichungen ergeben sich endlich:

$$\left.\begin{aligned}
d(k) &= -\frac{(x_m - x_h)(y_m - y_l) - (y_m - y_h)(x_m - x_l)}{(x_m - x_k)(y_m - y_l) - (y_m - y_k)(x_m - x_l)}\, d(h) \\
d(l) &= \frac{(x_m - x_h)(y_m - y_k) - (y_m - y_h)(x_m - x_k)}{(x_m - x_k)(y_m - y_l) - (y_m - y_k)(x_m - x_l)}\, d(h) \\
d(m) &= \frac{\left[\begin{array}{c}(x_m - x_k)(y_m - y_h) - (x_l - x_h)(y_m - y_k) \\ + (x_k - x_h)(y_m - y_l)\end{array}\right]}{(x_m - x_k)(y_m - y_l) - (y_m - y_k)(x_m - x_l)}\, d(h)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots 29.)$$

§. 29.

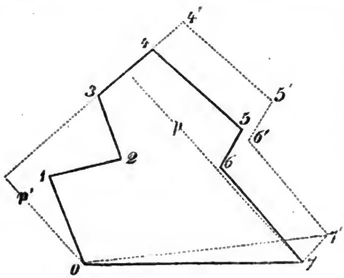
Der Einfluss eines Seitenfehlers auf den Flächeninhalt ergibt sich auf folgende Weise. Es sei die Seite (m—1,m) fehlerhaft, so hat man aus 15.) durch Differentiation:

$$2.dF = d(m-1,m)\left\{\begin{array}{l}(m-2,m-1)\text{Sin}(m-1)-(m-3,m-2)\text{Sin}[(m-1)\\ +(m-2)]+\ldots\pm(0,1)\text{Sin}[(m-1)+\ldots+(0)]\\ (m,m+1)\text{Sin}(m)-(m+1,m+2)\text{Sin}[(m)+(m+1)]\\ +\ldots.\pm(n-1,n)\text{Sin}[(m)+\ldots+(n-1)]\end{array}\right\};$$

aber die eingeklammerten Reihen sind nichts Anderes, als die Perpendikel, welche von den Endpunkten der nicht vorkommenden Seite o n auf die fehlerhafte gezogen werden können. Bezeichnet man diese Linien mit p, p′, so ist

$$d\,F = d\,(m-1,m).\frac{p+p'}{2} \quad \ldots . \; 30.)$$

d. h. der Fehler in der Fläche ist gleich dem Flächeninhalte eines Rechteckes, dessen eine Seite dem Seitenfehler, die andere aber dem arithmetischen Mittel zwischen den obigen Perpendikeln gleich ist.



In der That, wenn in der beiliegenden Figur 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 das fehlerfreie, und 0, 1, 2, 3, 4′, 5′, 6′, 7′ das fehlerhafte Polygon darstellt, so ist der Fehler in der Fläche = 4, 5, 6, 7, 7′, 6′, 5′, 4′ — 0, 7, 7′.

Zieht man von den Punkten 0 und 7 senkrechte auf 3, 4, so ist

$$4,\,5,\,6,\,7,\,7',\,6',\,5',\,4' = (7,\,7')\;p$$

$$0,\,7,\,7' = (7,\,7')\;\frac{p-p'}{2}$$

$$4,\,5,\,6,\,7,\,7',\,6',\,5',\,4' - 0,\,7,\,7' = (7,\,7')\;\frac{p+p'}{2}$$

Setzt man einen Winkel, etwa (m), fehlerhaft voraus, so wird

$$2dF = d(m)\left[\begin{array}{l} (m-1,m)\{(m,m+1)\,\mathrm{Cos}(m)-(m+1,m+2)\,\mathrm{Cos}[(m)\\ \quad +(m+1)]+\ldots\pm(n-1,n)\,\mathrm{Cos}[(m)+\ldots+(n-1)]\} \\ +(m-2,m-1)\{-(m,m+1)\,\mathrm{Cos}\,[(m-1)+(m)] \\ \quad +(m+1,m+2)\,\mathrm{Cos}\,[(m-1)+(m)+(m+1)]-\ldots \\ \quad \mp(n-1,n)\,\mathrm{Cos}[(m-1)+\ldots+(n-1)]\} \\ + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ +(0,1)\{\pm(m,m+1)\,\mathrm{Cos}\,[(1)+\ldots(m)]\mp(m+1,m+2) \\ \quad \mathrm{Cos}\,[(1)+\ldots+(m+1)]\pm\ldots\pm(n-1,n)\,\mathrm{Cos}\,[(1)+\ldots \\ \quad +(n-1)]\} \end{array}\right] \qquad 31.)$$

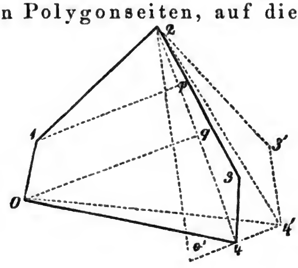
Nun sind die eingeklammerten Horizontalreihen nichts Anderes, als die Differenzen der Abscissen der Punkte n und m, bezogen auf die Coordinaten-Axen (m,m—1),(m—1,m—2),(m—2,m—3), ... (0, 1). Unterscheidet man diese Coordinaten mit so viel Strichen, wie viel Einheiten der Coordinatenursprung zum Stellenzeiger hat, so lässt sich diese Formel auch so schreiben:

$$2dF=d(m)[(m-1,m)(x_n^{(m)}-x_m^{(m)})+(m-2,m-1)(x_n^{(m-1)}-x_m^{(m-1)}) +\ldots+(0,1)(x_n^{(1)}-x_m^{(1)})]$$

oder

$$2dF=d\sigma[(m-1,m)\,\mathrm{Sin}\,\Theta^{(m)}+(m-2,m-1)\,\mathrm{Sin}\,\Theta^{(m-1)}+\ldots+(0,1)\,\mathrm{Sin}\,\Theta^{(1)}] \qquad 31'.)$$

Mit Worten: *Der Fehler in der Fläche ist gleich einer Dreieckfläche, dessen Grundlinie gleich ist der Verrückung des letzten Punktes im Polygone, und die Höhe gleich ist der algebraischen Summe der Projectionen sämmtlicher zwischen dem Anfangspunkte, und dem Scheitel des fehlerhaften Winkels liegenden Polygonseiten, auf die Diagonale, welche den fehlerhaften mit dem letzten Eckpunkte verbindet.* Zur Versinnlichung dieses Satzes stelle uns 0, 1, 2, 3, 4 das fehlerfreie, und 0, 1, 2, 3', 4' das fehlerhafte Polygon vor, so ist der Fehler in der Fläche gleich: 2, 4, 4' — 0, 4, 4';



aber

$$2\,(2,4,4') = (4,4') \times (2,4)$$
$$2\,(0,4,4') = (4,4').[(2,4) - (2,p) - (p,q)]$$

$$2\,[(2,4,4') - (0,4,4')] = (4,4')[(2,p) + (p,q)]$$

§. 30.

Wenn das Polygon mittelst Coordinaten bestimmt ist, ergibt sich der Einfluss eines Fehlers in den Coordinaten irgend eines Punktes [etwa m] auf die Fläche aus der Formel 16.)

$$2\,d\,F = d\,y_m\,(x_{m+1} - x_{m-1})$$

und

$$2\,d\,F = -\,d x_m (y_{m+1} - y_{m-1}) \quad \ldots 32.)$$

d. h. der Fehler in der Fläche wird durch ein Dreieck dargestellt, dessen Grundlinie gleich ist der Differenz der 2 benachbarten Abscissen, und Höhe gleich dem Fehler in der Ordinate, und umgekehrt.

Dritter Abschnitt.

§. 31.

Es ereignet sich in der Praxis bisweilen, dass man in der Messung eines oder des andern Umfangsstückes trotz aller Aufmerksamkeit einen groben Fehler begeht. Das Vorhandensein eines solchen Fehlers gibt sich manchmal dadurch kund, dass aus den gegebenen Stücken gar kein Polygon möglich ist (siehe §§. 10, 11.); zuverlässig wird es aber nur durch Controlemessungen erkannt. Man misst nämlich nebst den $2n-3$ nothwendigen Bestimmungsstücken, auch die übrigen sogenannten überschüssigen, und vergleicht die Resultate der Messung mit denen der Rechnung. Zeigt sich eine solche Abweichung, welche durch die Einwirkung der unvermeidlichen Fehler der Messung nicht erklärt werden kann, dann ist es gewiss, dass grössere Fehler vorgefallen sind, als es zulässig ist; und es fragt sich, ob es möglich, und auf welche Weise es möglich ist, die fehlerhaften unter den Daten aufzufinden, ohne dass man genöthigt ist, die ganze Messung zu wiederholen.

§. 32.

Zur Beantwortung dieser Frage diene folgende Betrachtung:

a) Wenn im Polygone ein überschüssiges Umfangsstück gemessen wurde, dann sind nur 2 Stücke noch unbekannt; aus den 3 Fundamental-Gleichungen lassen sich nun die 2 unbekannten eliminiren, und die Eliminationsgleichung enthält lauter bekannte Grössen, welche demnach eine identische Gleichung bilden müssen, wenn sie alle fehlerfrei sind; im entgegengesetzten Falle führen sie auf ein Absurdum, was nur dadurch gehoben werden kann, dass man irgend eine der bekannten Grössen für fehlerhaft erklärt, und sie ändert. Da man aber nacheinander jede von ihnen ändern, und dadurch den Widerspruch vollkommen heben kann, so ist die Auflösung unbestimmt, d. h. es kann jedes der Daten fehlerhaft sein. Unter diesen Umständen lässt sich demnach das Vorhandensein eines Fehlers zwar erkennen, aber das fehlerhafte Stück kann nicht gefunden werden.

b) Es seien zwei überschüssige Umfangsstücke gemessen, demnach ein Stück unbekannt. In diesem Falle lässt sich aus den 3 Fundamental-Gleichungen die Unbekannte eliminiren, und man erhält 2 Gleichungen, welche aus lauter bekannten Grössen zusammengesetzt sein werden. Sind nun alle gemessene Stücke fehlerfrei, dann sind beide Gleichungen identisch; im entgegengesetzten Falle drücken beide etwas Unmögliches aus. Rühren die Widersprüche in beiden Gleichungen von einem und demselben fehlerhaften Stücke her, dann kann man dieses aus ihnen eliminiren, und die Eliminations-Gleichung muss identisch werden. Da man nun nacheinander jedes gemessene Stück eliminiren kann und nur dann eine identische Gleichung erfolgt, wenn das fehlerhafte eliminirt wurde, so ist klar, dass dasselbe wirklich gefunden werden kann; sind hingegen mehrere gemessene Stücke fehlerhaft, dann schliesst die Eliminations-Gleichung ein Absurdum in sich, folglich ist eine weitere Bestimmung nach dem Vorhergehenden unmöglich.

c) Es seien 3 überschüssige Umfangsstücke gemessen. In diesem Falle müssen alle 3 Fundamental-Gleichungen identisch werden, wenn alle gemessenen Stücke fehlerfrei sind; sind aber im Polygone 2 Stücke gefehlt, dann lassen sich diese aus den 3 Gleichungen eliminiren, und die Eliminations-Gleichung muss identisch werden. Da man nacheinander jedes Paar von gemessenen Stücken eliminiren kann, und nur dann eine identische Gleichung entsteht, wenn das fehlerhafte Paar eliminirt wurde, so ist ersichtlich, dass dieses wirklich bestimmt werden kann.

Sind mehr als 2 Stücke gefehlt, dann ist die Eliminations-Gleichung mit sich selbst im Widerspruch, und jede weitere Bestimmung unmöglich.

Wenn man nebst den Umfangsstücken auch Diagonalen, und die anliegenden Winkel messen würde, so liesse sich aus diesen auf die Beschaffenheit der fehlerhaften Stücke auf ähnliche Weise schliessen, wie aus den Umfangsstücken; wir wollen jedoch diesen Gegenstand nicht weiter verfolgen.

§. 33.

Die im vorigen §. angedeuteten Fälle, in welchen eine Auffindung der fehlerhaften Stücke möglich ist, lassen sich auf folgende Weise zusammenstellen:

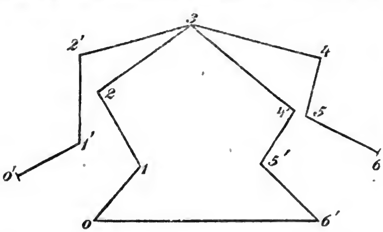
1. Wenn alle Umfangsstücke gemessen sind, und 1 Winkel gefehlt ist.
2. Wenn alle Umfangsstücke gemessen sind, und 1 Seite gefehlt ist.
3. Wenn eine Seite nicht gemessen, u. 1 Winkel gefehlt ist.
4. „ ein Winkel dto. dto. 1 Winkel dto.
5. „ dto. dto. dto. dto. 1 Seite dto.
6. „ eine Seite und 1 Winkel gefehlt sind.
7. „ 2 Winkel gefehlt sind.

Für alle diese Fälle werden wir 2 Auflösungen geben, nämlich eine durch Construction, eine durch Rechnung, wobei zu bemerken ist, dass die graphische Methode nur bei bedeutenden Fehlern mit Sicherheit angewendet werden kann.

§. 34.

Aufgabe. In einem Polygone sind alle Umfangsstücke gemessen, und 1 Winkel fehlerhaft; denselben zu finden.

Auflösung. a) Durch Construction. Man construire das Polygon über eine beliebige Seite vor- und rückwärts, beide Constructionen müssen sich nun in dem Scheitel des fehlerhaften Winkels durchschneiden. Denn angenommen, dass der Winkel (3) fehlerhaft ist, sind die Eckpunkte 0, 1, 2, 3 gegen die Grundlinie 0, 6′ richtig, hingegen die Punkte 4, 5 und 6 unrichtig gelegen; weil diese durch den fehlerhaften Winkel verrückt wurden. Auf ähnliche Weise liegen die Punkte 6′, 5′, 4′, 3 gegen die Grundlinie richtig, während 2′, 1′ und 0′ verschoben sind. Demnach bilden die Punkte 0, 1, 2, 3, 4′, 5′, 6′ das wahre Polygon, und der Winkel (4, 3, 4′) den Fehler in (3).



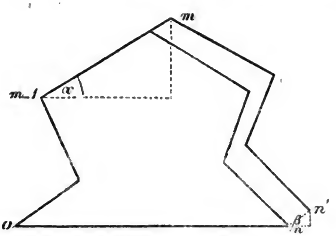
b) Durch Rechnung. Man berechne die Ordinaten aller Eckpunkte auf zwei Wegen, einmal, indem man den Eckpunkt 0, das andere Mal, indem man den Eckpunkt n zum Coordinaten-Ursprung wählt; findet man einen solchen Eckpunkt, dessen Ordi-

naten nach beiden Rechnungen gleich sind, so liegt der fehlerhafte Winkel in ihm.

§. 35.

Aufgabe. In einem Polygone sind alle Umfangsstücke gemessen, und eine Seite fehlerhaft; diese zu finden.

Auflösung. a) Durch Construction. Man construire das Polygon über einer beliebigen Seite als Grundlinie bis ans Ende, man erhält so zwei Schlusspunkte n und n', welche aufeinander fallen sollten, wenn alle Seiten fehlerfrei wären. Da nun durch den Seitenfehler alle darauf folgenden Punkte parallel verschoben werden, so bildet die Schlusslinie nn' eine zur fehlerhaften Seite parallele Gerade, und die Länge nn' ist gleich dem Fehler in der Seite. Sind im Polygone mehrere Seiten mit der Schlusslinie parallel, so können sie alle fehlerhaft sein, ja sogar die nahe parallelen sind verdächtig, weil der Parellelismus durch die zulässigen Messungs- und Constructionsfehler leicht in eine kleine Divergenz geändert werden kann.



b) Durch Rechnung. Man berechne die Coordinaten aller Eckpunkte, und rechne daraus die Neigungswinkel aller Polygonseiten durch die Formel:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_m - y_{m-1}}{x_m - x_{m-1}},$$

wo man für m der Reihe nach alle positiven ganzen Werthe von 1 angefangen bis n zu setzen hat. Auf ähnliche Weise berechne man den Neigungswinkel der Schlusslinie durch die Formel:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_{n'} - y_n}{x_{n'} - x_n},$$

wobei

$$y_n = 0, \ x_n = (0, n)$$

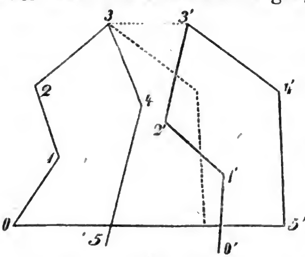
ist.

Findet man nun unter den Werthen von α einen oder mehrere, welche mit β gleich sind, so sind die correspondirenden Seiten parallel zur Schlusslinie, folglich wahrscheinlich fehlerhaft.

§. 36.

Aufgabe. In einem Polygone ist eine Seite nicht gemessen, und 1 Winkel fehlerhaft; diesen zu bestimmen.

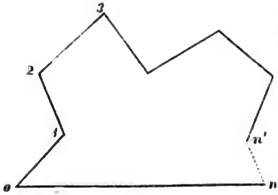
Auflösung. a) Durch Construction. Man nehme für die nicht gemessene Seite eine beliebige Länge an, und construire über sie als Grundlinie das Polygon vor- und rückwärts. Verbindet man nun die gleichnamigen Ecken beider Constructionen mittelst gerader Linien, so ist derjenige Eckpunkt der fehlerhafte, dessen Verbindungslinie zur Grundlinie parallel ist; und die Länge der Verbindungslinie drückt den Fehler aus, den man in der Wahl der Grundlinie begangen hat. Denn nehmen wir an,



3, 3′ wäre mit der Grundlinie 0, 5′ parallel, und wir schieben das Polygon 5′, 4′, 3′, 2′, 1′, 0′ parallel zur Grundlinie vorwärts, so fällt endlich 3′ auf 3, und wir haben den im §. 34 erklärten Fall vor uns. Dass bei diesem Vorgehen die Grundlinie genau um 3, 3 geändert wird, ist für sich klar.

b) Durch Rechnung. Die Auflösung dieser Aufgabe mittelst Rechnung ist von der des §. 34. gar nicht verschieden.

Anmerkung. Wenn in einem Polygone eine Seite nicht gemessen, und eine gefehlt ist, so lässt sich der Fehler nicht auffinden. Denn denken wir uns das Polygon 0, 1, 2, ... n aus den



Umfangsstücken construirt (wobei die unbekannte Seite nur der Richtung nach aufgetragen werden kann), so kann das Polygon nicht schliessen, weil unter den Umfangsstücken sich ein fehlerhaftes befindet, der letzte Punkt n wird demnach ausserhalb der Grundlinie zu stehen kommen; würden wir aber anstatt der fehlerhaften Seite die wahre Länge setzen, so würde der letzte Punkt auf die Grundlinie fallen. Nun ist es leicht ersichtlich, dass der Punkt n durch Aenderung einer jeden Polygonseite in die Grund-

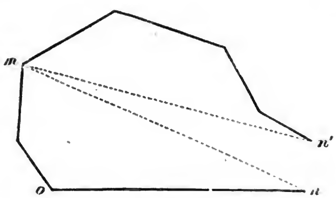
linie gebracht werden kann (man denke sich z. B. den Arm 2, 3, ... n′ längs der Geraden 2, 1 parallel verschoben, so kommt n′ nach n, und das Polygon schliesst sich); demnach kann eine jede Seite fehlerhaft sein, und eine nähere Bestimmung des fehlerhaften Stückes ist unmöglich.

Dasselbe gilt auch in dem Falle, wenn im Polygone alle Stücke gemessen, und zwei Seiten gefehlt sind.

§. 37.

Aufgabe. In einem Polygone ist ein Winkel nicht gemessen, und ein Winkel gefehlt; das fehlerhafte Stück zu finden.

Auflösung. a) Durch Construction. Man beginne die Construction mit einer dem unbekannten Winkel vorangehenden Seite, und construire das Polygon bis zum letzten Punkte, so erhält man 2 Schlusspunkte n und n′; dann untersuche man, ob irgend ein Eckpunkt von den Schlusspunkten gleich weit absteht, dieser ist der Scheitel des fehlerhaften Winkels.



Denn angenommen, m wäre der fehlerhafte Eckpunkt, alle darauf folgende Punkte des Polygones werden in Kreisbögen verschoben, folglich die Endpunkte n n′ sind Punkte eines Kreises, dessen Mittelpunkt der fehlerhafte Eckpunkt m ist, und der Winkelfehler ist (n, m, n′).

b) Durch Rechnung. Man berechne die Coordinaten $y_1, y_2, y_3 \dots y_{n'}$ und $x_1, x_2, x_3 \dots x_{n'}$, rechne aus ihnen die Diagonalen (0,n), (1,n), (2,n) .... (n—1,n) durch die Formel

$$(m,n)^2 = (x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2;$$

ebenso rechne man die Diagonalen (0,n′), (1,n′), (2,n′) ... (n—1,n′) durch die ähnliche Formel

$$(m,n')^2 = (x_{n'} - x_m)^2 + (y_{n'} - y_m)^2.$$

Nun sehe man nach, ob nicht in diesen zwei Reihen zwei homologe Diagonalen gleiche Werthe besitzen, in dem correspondirenden Eckpunkte ist der fehlerhafte Winkel.

§. 38.

Aufgabe. In einem Polygone ist ein Winkel nicht gemessen, und eine Seite fehlerhaft; diese zu bestimmen.

Auflösung. Man beginne die Construction mit einer dem unbekannten Winkel vorangehenden Seite, und verfahre ganz nach der Anweisung des §. 35. Ebenso ist die Auflösung mittelst Rechnung von der Auflösung desselben §. gar nicht verschieden.

§. 39.

Aufgabe. In einem Polygone sind alle Umfangsstücke gemessen, aber eine Seite und ein Winkel sind fehlerhaft; diese aufzufinden.

Auflösung. a) Durch Construction. Man construire das Polygon bis zum letzten Punkte n, und untersuche, ob nicht irgend eine Polygonseite mit der Schlusslinie nn′ parallel ist; liegt zufälliger Weise am Schlusspunkte der fehlerhafte Winkel, so muss man eine solche Seite finden, weil die Construction von dem fehlerhaften Winkel ganz unabhängig ist, und die Aufgabe fällt mit der des §. 38. zusammen. Wenn aber der fehlerhafte Winkel nicht am Schlusse liegt, so findet man keine einzige Seite, welche mit der Schlusslinie parallel wäre, weil diese von einer zweifachen, nämlich einer parallelen und einer drehenden Verrückung des Schlusspunktes erzeugt wird, von welchen die letztere den Parallelismus aufhebt. In diesem Falle construire man das Polygon weiter, indem man den Winkel (n), und die Seite (n, o) ansetzt, und untersuche man wieder, ob nicht irgend eine Polygonseite mit der Schlusslinie 0,0′ parallel ist u. s. w. so lange, bis man endlich auf eine Schlusslinie kommt, welche mit einer Polygonseite parallel ist; diese nämliche Seite, und der am Schlusse liegende Winkel sind dann fehlerhaft.

b) Durch Rechnung. Man berechne die Coordinaten aller Eckpunkte, und suche die Neigungswinkel aller Polygonseiten, und den der Schlusslinie nach den Formeln des §. 35. Sind die ersteren von dem letzteren ganz verschieden, so gehe man in der Berechnung der Coordinaten weiter, indem man den nächstfolgenden mit 0′ bezeichneten Eckpunkt des Polygones als den (n+1) ansieht, so erhält man zwei neue Schlusspunkte, nämlich 0 und 0′. Diese werden nun auf dieselbe Weise behandelt, wie die Schlusspunkte n und n′ u. s. w., bis man endlich auf einen Schluss kommt, wo zur Schlusslinie irgend eine Polygonseite parallel ist.

§. 40.

Aufgabe. In einem Polygone sind alle Umfangsstücke gemessen, und 2 Winkel fehlerhaft; diese aufzufinden.

Auflösung. a) Durch Construction. Man construire das Polygon bis zum letzten Punkte, und es entstehen 2 Schlusspunkte; dann untersuche man, ob nicht irgend ein Eckpunkt von den Schlusspunkten gleich weit absteht. Liegt am Schlusse zufällig ein fehlerhafter Winkel, dann ist die Construction von diesem unabhängig, und die Aufgabe fällt mit der des §. 37. zusammen; man wird demnach einen solchen Eckpunkt finden, der die obige Eigenschaft besitzt, und der zweite fehlerhafte Winkel muss in diesem Eckpunkte liegen. Liegt aber am Schlusse kein fehlerhafter Winkel, dann findet sich kein einziger Eckpunkt, dessen Abstände von den Schlusspunkten gleich gross wären, denn beide werden von den fehlerhaften Winkeln auf ungleiche Weise afficirt, entweder sind sie beide falsch, oder der eine ist richtig, der andere unrichtig; jedenfalls sind sie ungleich. In diesem Falle construire man das Polygon weiter, indem man den nächsten Winkel und Seite ansetzt, und untersuche man wieder, ob irgend ein Eckpunkt von den neuen Schlusspunkten gleich weit ist, oder nicht, u. s. w., endlich muss einer der fehlerhaften Winkel an den Schluss kommen, und man wird einen Eckpunkt im Polygone finden, der die oben erwähnte Eigenschaft besitzt; dieser ist der Scheitel des zweiten fehlerhaften Winkels.

b) Durch Rechnung. Man berechne die Coordinaten aller Eckpunkte, und suche die Diagonalen

$$(0, n), (1, n), (2, n) \ldots\ldots (n-1, n)$$
$$(0, n'), (1, n'), (2, n') \ldots\ldots (n-1, n');$$

findet man unter ihnen kein einziges homologes Paar mit gleichen Werthen, so setze man die Coordinatenrechnung fort, indem man den nächsten Punkt, dessen Stellenzeiger $0'$ ist, als den $(n+1)$sten der gebrochenen Linie ansieht, und berechne die Diagonalen

$$(1, 0), (2, 0), (3, 0) \ldots\ldots (n', 0)$$
$$(1, 0'), (2, 0') (3, 0') \ldots\ldots (n', 0')$$

u. s. w., bis man endlich auf einen Schlusspunkt kommt, an welchem wenigstens ein Paar homologe Diagonalen gleiche Werthe erhalten, dann sind die correspondirenden Eckpunkte die gesuchten.

§. 41.

Ein Beispiel wird die Anwendung dieser Sätze erläutern.

In einem Vierecke sind alle Seiten und Winkel gemessen; man hat gefunden:

$(0) = 110^{0}.\ 20'.\ 10''$	$(0,1) = 152{\cdot}35$
$(1) = 131.\ 30.\ 20$	$(1,2) = 196{\cdot}63$
$(2) = 49.\ 59.\ 45$	$(2,3) = 303{\cdot}40$
$(3) = 73.\ 29.\ 45$	$(3,0) = 135{\cdot}42$

Summirt man die Winkel, so ergibt sich

$$S = 365^{0}.\ 20'.$$

anstatt der richtigen 360^{0}; demnach ist gewiss ein Winkel, vielleicht auch mehrere Winkel fehlerhaft. Setzen wir den ersteren, als den einfacheren Fall voraus, und wenden den Satz des §. 34. an, so finden wir folgende Reihen von Ordinaten

$y_0 = 0$	$y'_0 = -\ 20{\cdot}240$
$y_1 = 142{\cdot}854$	$y'_1 = 126{\cdot}917$
$y_2 = 316{\cdot}212$	$y'_2 = 290{\cdot}900$
$y_3 = 34{\cdot}583$	$y'_3 = 0$

Da kein einziges homologes Paar unter diesen Ordinaten gleiche Werthe besitzt, so ist gewiss, dass nebst einem Winkel wenigstens eine Seite, oder noch ein Winkel gefehlt ist. Nehmen wir den ersteren Fall an, und rechnen die Coordinaten der Punkte 3, 0, 1, 2, 3′, 0′, 1′, 2′, so ergibt sich folgendes Schema

Namen der Punkte	y	x
3	0	135·42
0	0	0
1	142·854	— 52·946
2	316·212	39·846
3′	34·583	152·703
0′	21·996	17·869
1′	159·310	— 48·126
2′	340·543	28·150

Aus diesen Coordinaten findet man für die Neigungswinkel der Seiten α, und der Schlusslinie β folgende Log tg:

Seite	Log tg α	Schluss-linie	Log tg β
0, 1	0·431062n	3, 3′	0·301244
1, 2	0·271436	0, 0′	0·090244
2, 3′	0·397148	1, 1′	0·533277
3′, 0′	8·970133	2, 2′	0·318123n
0′, 1′	0·318206n		

Man sieht, dass die Seite 0′, 1′, und die Schlusslinie 2, 2′ sehr nahe parallel sind, und beide Linien sind Bestandtheile eines und desselben Viereckes; demnach ist die Seite (0, 1) nebst dem Winkel (2) fehlerhaft. Corrigirt man diesen Winkel nach der Winkelsumme, so findet man als den richtigen Werth

$$(2) = 44^0.\ 39'.\ 45.''$$

Mit diesem Werthe erhält man endlich durch Auflösung des Viereckes

$$(0, 1) = 125 \cdot 35.$$

Anmerkung. Hätte man keine einzige Seite gefunden, welche mit irgend einer der 4 Schlusslinien dieses Beispieles parallel wäre, so wäre noch, als letzter auflösbarer Fall, zu betrachten übrig, ob nicht 2 Winkel gefehlt sind. Zeigte sich nach Anwendung des im §. 40. angegebenen Verfahrens, dass dies nicht der Fall ist, dann bliebe nichts Anderes übrig, als die Messung der Umfangsstücke aufs Neue vorzunehmen.

Druck von A. Edelmann in Leipzig.

Errata.

Seite 1 Zeile 9 von unten } anstatt Endpunkte lese man Eckpunkte
„ 2 „ 5 }
„ 7 „ 1 von unten anstatt (m—2v′) 180° lese man (m—1—2v′) 180°
„ 8 „ 2 „ (m—1—2v) „ „ (m—1—2v) 180°
„ 8 „ 3 180° wird gestrichen.
„ 12 „ 10 von unten } anstatt (p,q) lese man (n,p)
„ 13 „ 15 }
„ 13 „ 7 von unten „ Endpunkt lese man Eckpunkt
„ 16 „ 4 „ „ „ y_{n1} „ „ y_{n-1}
„ 17 „ 11 „ „ „ $\frac{y_{n-1}}{(n,-1)n)}$ „ „ $\frac{y_{n-1}}{(n-1,n)}$
„ 17 „ 10 „ „ „ $\frac{(o,n)-x_{n-1}}{(n,-1,n)}$ „ „ $\frac{(o,n)-x_{n-1}}{(n-1,n)}$
„ 19 Columne q die sechste Zahl soll heissen + 176·834
„ 19 Zeile 2 von unten soll heissen Sin (7) = $\frac{-864·908}{865·829}$
„ 23 Columne ∢w die 4. Zahl soll heissen 118°. 0′. 21″.
„ 23 Columne q die letzte Zahl soll heissen + 164·688
„ 24 Zeile 4 anstatt 61°. 59′. 59″. lese man 61°. 59′. 39″.
„ 29 „ 15 von unten anstatt Sin(n—) lese man Sin(n—1)
„ 30 „ 13 „ „ „ 2 F „ „ — 2 F
„ 31 „ 2 „ „ „ Fläche „ „ Flächen
„ 31 „ 14 u. 15 von unten „ 2 f „ „ f
„ 32 „ 14 „ Abürzungen „ Abkürzungen
„ 32 „ 19 „ Endpunkte „ Eckpunkte

LEIPZIG.
Druck von Alexander Edelmann
Universitäts-Buchdrucker